FM210 - Meccanica Analitica
Anno Accademico 2023/2024

Appello straordinario (12-11-2024)

<u>Esercizio 1</u> [6] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa m sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = x\left(2x^2 - 1\right)e^{-x^2}.$$

1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Si studino le curve dei livello dell'energia totale del sistema.
4. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.

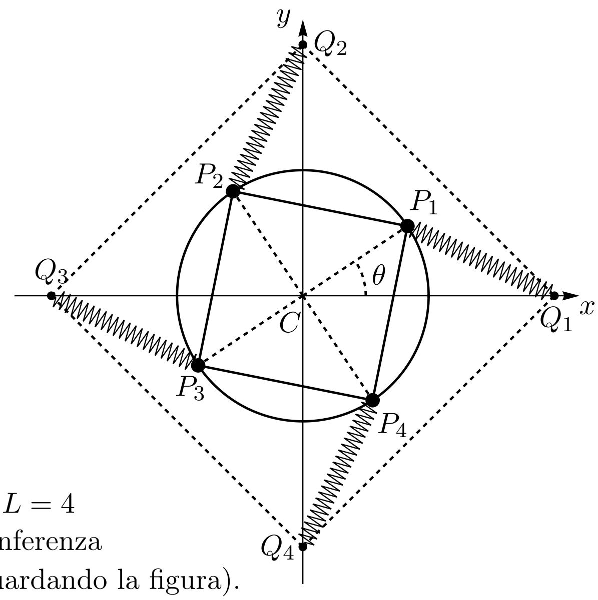
<u>Esercizio 2</u> [6+1] Sia $\kappa = Oxyz$ un sistema di riferimento fisso, e sia γ una guida parabolica, di equazione $y = (x - h_0)^2$ nel piano verticale xy, con $h_0 > 0$. Un carrello A, che si può schematizzare come un punto materiale, scorre lungo la guida in modo tale che la sua coordinata lungo l'asse x sia data da $x_A(t) = v_0 t$, con v_0 costante e $t \geq 0$. Sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento mobile, tale che l'origine O' coincide con A, l'asse ξ è diretto tangenzialmente alla guida, rivolto verso destra, e l'asse η è diretto ortogonalmente alla guida, rivolto verso l'alto. Sul carrello viaggia un omino: all'istante iniziale $t = 0$, prima che il carrello inizi a muoversi, l'omino lancia dal carrello un sasso P con velocità v, in una direzione che forma un angolo $\alpha \in (0, \pi/2)$ con il verso positivo dell'asse x. Il sasso, una volta lanciato, si muove soggetto alla forza di gravità (si indichi con g l'accelerazione di gravità).

1. Si scriva la trasformazione rigida $D\colon K \to \kappa$ che fa passare dal sistema di riferimento K al sistema di riferimento κ, come composizione di una traslazione C con una rotazione B.
2. Si determini il moto $\boldsymbol{q}(t)$ del sasso P nel sistema di riferimento fisso κ.
3. Si determini il moto $\boldsymbol{Q}(t)$ del sasso P nel sistema di riferimento mobile K.
4. Si determinino la velocità assoluta e la velocità relativa del sasso P.
5. Si trovi, in funzione dell'angolo α, il valore che deve assumere v perché l'omino possa riprendere il sasso mentre il carrello si muove lungo la guida; in particolare si determini in quale tempo t_0 questo succede e in quale punto della guida si trova il carrello al tempo t_0.
6. [Se $v_{\max}$ è la velocità massima con cui l'omino può lanciare il sasso, si discuta per quali valori di α l'omino è in grado di lanciare il sasso e riprenderlo mentre cade; in particolare si dimostri che esiste un valore di soglia $\bar{v}_0$ per v_0 tale che se $v_0 > \bar{v}_0$ l'omino non è in grado di riprendere il sasso, indipendentemente dalla direzione in cui lo lancia.]

<u>Esercizio 3</u> [6+2] Due punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa m, sono vincolati a muoversi sulla superficie di un cilindro circolare retto di raggio $r = 1$. I due punti sono soggetti alla forza di gravità, diretta nel verso discendente dell'asse del cilindro (si indichi con g l'accelerazione di gravità). Inoltre tre molle, tutte di costante elastica k e lunghezza a risposo trascurabile, collegano i due punti tra loro ed entrambi i punti con un punto fisso posto sull'asse del cilindro.

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
3. Si dimostri che esiste un momento conservato e si trovi la variabile ciclica corrispondente.
4. [Si applichi il metodo di Routh per studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio del sistema ridotto.]

Esercizio 4 [6+2] Si consideri il sistema meccanico costituito da quattro punti materiali P_1, P_2, P_3 e P_4, tutti di massa m, che si muovono in piano orizzontale nel modo seguente (cfr. la figura). I punti sono disposti in corrispondenza dei vertici di un quadrato indeformabile $\mathcal{Q}$, la cui diagonale ha lunghezza $\ell = 2$, e sono vincolati a scorrere lungo una circonferenza di raggio $r = 1$. Inoltre quattro molle, tutte di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile, collegano P_1, P_2, P_3 e P_4, rispettivamente, con i punti fissi Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4, collocati in corrispondenza dei vertici di un quadrato cha ha la diagonale di lunghezza $L = 4$ e il centro coincidente con il centro C della circonferenza (si scelga un sistema di riferimento opportuno guardando la figura).



1. Si scriva la lagrangiana del sistema (può essere conveniente utilizzare come coordinata lagrangiana l'angolo θ che il segmento CP_1 forma con il verso positivo dell'asse x).
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema.
4. Si discuta la stabilità delle configurazioni di equilibrio.
5. Si discuta come cambia lo scenario se il piano è verticale, con la forza di gravità diretta lungo la direzione e il verso del segmento che collega il punto Q_2 al punto Q_4 (cfr. la figura).
6. [Si discuta come cambia ulteriormente lo scenario, rispetto al punto 5, nel caso in cui i quattro lati del quadrato $\mathcal{Q}$ abbiano ciascuno massa M.]

Esercizio 5 [6+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$Q = q\sqrt{1+q^2} + \frac{p^2(1+q^2)}{2(1+2q^2)^2}, \qquad P = \frac{p\sqrt{1+q^2}}{1+2q^2}.$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
2. Si dimostri che la trasformazione è canonica trovandone una funzione generatrice di seconda specie $F(q,P)$, e si verifichi che $\partial^2 F/\partial q \partial P$ non si annulla in $\mathcal{D}$.
3. Data l'hamiltoniana

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{(1+q^2)p^2}{2(1+2q^2)^2} + q\sqrt{1+q^2},$$

si determini l'hamiltoniana $\mathcal{K}(Q,P)$ nelle nuove variabili (Q,P), e si trovi la soluzione delle equazioni di Hamilton nelle variabili (Q,P) in corrispondenza della condizione iniziale che, espressa nelle variabili originali, è data da $(q(0),p(0)) = (0,1)$.
4. [Si esprima la soluzione del punto 5 in termini delle variabili originali (q,p).]
5. [Si verifichi esplicitamente che la trasformazione di coordinate conserva le parentesi di Poisson fondamentali].