

FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2023/2024

Recupero della prima prova di esonero (18-06-2024)

ESERCIZIO 1. [6+2] Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Si calcolino gli autovalori e gli autovettori di A .
2. Si usi il risultato al punto 1 per calcolare l'esponenziale di At , per $t \in \mathbb{R}$.
3. Si utilizzi il risultato al punto 2 per trovare la soluzione il sistema di equazioni differenziali lineari in $\mathbb{R}^3$

$$\dot{x} = Ax,$$

con dato iniziale $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (-1, 0, 1)$.

4. [Si dimostri che il moto al punto 3 avviene su un piano e se ne determini l'equazione.]

ESERCIZIO 2. [6+3] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = (x - 2\alpha)x^3e^x, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Per $\alpha = 1$, si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Per $\alpha = 1$, si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Per $\alpha = 1$, si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
4. [Si risponda alle stesse domande al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e si tracci un diagramma di biforcazione dei punti di equilibrio.]

ESERCIZIO 3. [6+2] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa m sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = -\frac{5}{x} - \log|x| - \frac{2}{x^2}.$$

1. Si studi di il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Si studino le curve dei livello dell'energia totale del sistema.
4. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
5. Si dimostri che esistono traiettorie illimitate.
6. [Si discuta se le traiettorie illimitate divergono in un tempo finito o infinito.]

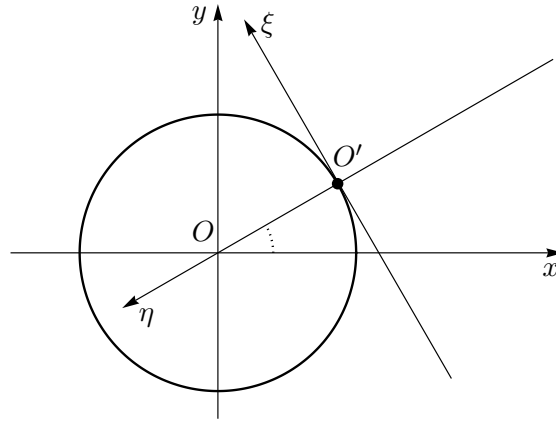
Esercizio 4. [6+2+2] Un punto materiale di massa μ è soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \frac{\alpha}{\rho} - 3 \log \rho,$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Sia L il modulo del momento angolare, e si assuma che sia $L > 0$.

1. Si scrivano l'equazione del moto per la variabile ρ e per la variabile θ .
2. Si disegni il grafico dell'energia potenziale efficace, al variare di α e L .
3. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato all'equazione per la variabile ρ e se ne discuta la stabilità, al variare di α e L .
4. Si studino qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$, al variare di α e L .
5. [Si discuta come cambia lo scenario nel caso in cui si abbia $L = 0$.]

Esercizio 5. [6+3] Un carrello si muove in un piano orizzontale lungo una guida circolare di raggio R con velocità angolare costante ω . Si scelga un sistema di riferimento fisso $\kappa = Oxyz$ tale che la guida giaccia nel piano xy , il suo centro coincida con O e, all'istante $t = 0$, il carrello si trovi in corrispondenza del punto $(R, 0, 0)$. Sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento mobile tale che O' coincida con il carrello e l'asse ξ sia tangente alla guida e sia diretto nel verso di avanzamento del carrello (quindi, a $t = 0$, l'asse ξ è parallelo all'asse y). Un omino che si trova sul carrello, subito prima che il carrello inizi a muoversi, lancia un sasso verso l'alto con velocità v_0 : il sasso si muove sottoposto alla forza di gravità (si indichi con g l'accelerazione di gravità).



1. Si scriva la trasformazione rigida $D: K \rightarrow \kappa$ che fa passare dal sistema K al sistema κ , come composizione di una traslazione C con una rotazione B .
2. Si determini il moto $\mathbf{q}(t)$ del sasso nel sistema di riferimento fisso κ .
3. Si determini il moto $\mathbf{Q}(t)$ del sasso nel sistema di riferimento mobile.
4. Si determinino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento del sasso.
5. [Si determini il valore che deve avere v_0 , un volta fissato ω , perché l'omino riprenda il sasso quando il carrello riattraversa la prima volta la posizione iniziale.]