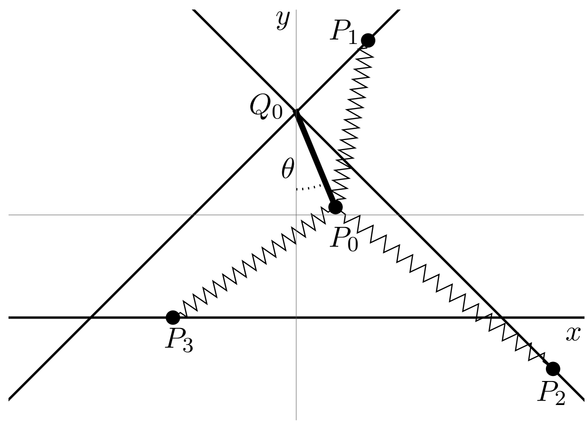
FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2023/2024

Recupero della seconda prova di esonero (18-06-2024)

<u>Esercizio 1.</u> [6+2] Tre punti materiali P_1, P_2 e P_3, tutti di massa m, sono vincolati a muoversi nel piano xy, sulle rette $y = 1+x$, $y = 1-x$ e $y = -1$, rispettivamente, e sono collegati, ciascuno tramite una molla di lunghezza tascurabile e costante elastica k, a un quarto punto materiale P_0, che ha sempre massa m ed è a sua volta collegato al punto $Q_0 = (0, 1)$ tramite un'asta di lunghezza $\ell = 1$ e massa trascurabile. Tutti e quattro i punti sono inoltre soggetti alla forza di gravità, diretta nel verso discendente dell'asse y (si indichi con g l'accelerazione di gravità).



1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
3. [Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne studi la stabilità nel caso in cui la massa M dell'asta non sia trascurabile, ovvero si abbia $M > 0$.]

<u>Esercizio 2.</u> [6+2+2] Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi sul paraboloide di equazione $z = -x^2 - y^2$ ed è collegato al punto P_0 di coordinate $(0, 0, 1)$ tramite una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce la forza di gravità diretta verso l'asse z discendente (sia g l'accelerazione di gravità).

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si verifichi che il sistema è invariante per rotazioni intorno all'asse z e si determini un sistema di coordinate in cui una di esse è ciclica.
3. Si determini il momento conservato e si scriva la lagrangiana ridotta.
4. Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema descritto dalla lagrangiana ridotta e se ne discuta la stabilità.
5. [Si studi l'energia potenziale ottenuta al punto 4 e si discuta qualitativamente il moto nello spazio delle fasi corrispondente.]
6. [Si discuta l'esistenza e la stabilità delle configurazioni di equilibrio per la lagrangiana originale al punto 1.]

<u>Esercizio 3.</u> [6+2] Si consideri il sistema meccanico costituito da tre punti materiali P_0, P_1 e P_2, tutti di massa m, che si muovono in un piano orizzontale nel modo seguente: P_0 scorre lungo una circonferenza di raggio $R = 1$, mentre P_1 e P_2 scorrono lungo due rette tra loro ortogonali, passanti per il centro della circonferenza. Due molle di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla collegano il punto P_2 ai punti P_0 e P_1, mentre una terza molla, sempre di lunghezza a riposo nulla ma di costante elastica $2k$, collega tra loro i punti P_0 e P_1.

1. Si scrivano la lagrangiana e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
3. [Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità nel caso in cui le molle abbiano tutti la stessa costante elastica k.]

<u>Esercizio 4.</u> [6+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \alpha \log p + \log q, \\ P = \beta q p^{\gamma} \log q, \end{cases}$$

1. Se ne determini il dominio $\mathcal{D}$.
2. Si determinino i valori dei parametri α, β, γ per cui la trasformazione è simplettica
3. Data la lagrangiana
$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^2}{2q^2 \log^2 q}$$
si scrivano l'hamiltoniana associata e le corrispondenti equazioni di Hamilton.
4. Si determini l'espressione dell'hamiltoniana al punto precedente nelle variabili (Q, P).
5. Si determini nel nuovo sistema di coordinate la soluzione corrispondente al dato iniziale $(q(0), \dot{q}(0)) = (e, e)$.
6. [Si scriva la soluzione del punto precedente nel sistema di coordinate originale.]

<u>Esercizio 5.</u> [6+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$Q_1 = q_1\sqrt{p_1 q_1 - p_2 q_2}, \qquad Q_2 = q_1 q_2 \sqrt{p_2 q_2}, \qquad P_1 = \frac{\sqrt{p_1 q_1 - p_2 q_2}}{q_1}, \qquad P_2 = \frac{1}{q_1}\sqrt{\frac{p_2}{q_2}}.$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
2. Si dimostri che la trasformazione è canonica trovandone una funzione generatrice di seconda specie $F(q_1, q_2, P_1, P_2)$.
3. Si verifichi che la matrice 2×2 di elementi $\partial^2 F/\partial q_i \partial P_j$ è non singolare in $\mathcal{D}$.
4. Data l'hamiltoniana
$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2q_1^4}\left((p_1 q_1 - p_2 q_2)^2 + \frac{p_2^2}{q_2^2}\right),$$
si determini l'hamiltoniana $\mathcal{K}(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ nelle nuove variabili.
5. Si consideri il sistema descritto dall'hamiltoniana data e si determini la soluzione delle equazioni del moto nelle nuove variabili al variare dei dati iniziali.
6. [Si determini la soluzione delle equazioni del moto nelle variabili originali in corrispondenza del dato iniziale $q_1(0) = q_2(0) = p_2(0) = 1$ e $p_1(0) = 2$].
7. [Si verifichi esplicitamente che la trasformazione di coordinate conserva le parentesi di Poisson fondamentali].