Meccanica razionale – Lagrangiana #7

Esercizio 7 (★★☆☆☆). Un sistema meccanico è costituito da 2 punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa $m = 1\,\mathrm{kg}$, sono vincolati a muoversi in un piano verticale, il primo lungo una circonferenza $\mathcal{C}_1$ di raggio $r_1 = 1\,\mathrm{m}$ e il secondo lungo una circonferenza $\mathcal{C}_2$ di raggio $r_2 = \sqrt{2}\,\mathrm{m}$, che ha lo stesso centro di $\mathcal{C}_1$. Sui punti agisce la forza di gravità (si indichi con g l'accelerazione di gravità); inoltre il punto P_2 è collegato al punto P_1 tramite un'asta di lunghezza $\ell = 1\,\mathrm{m}$ e massa trascurabile e al punto più in alto della circonferenza $\mathcal{C}_2$ tramite una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Si richiede di rispondere alle domande che seguono.

1) Scrivere la lagrangiana del sistema;

2) Scrivere le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange;

3) Determinare le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

4) Se l'asta ha massa $M = 1\,\mathrm{kg}$ distribuita in modo omogeneo su tutta la sua lunghezza, si determini la lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema composto dall'asta e dai punti P_1 e P_2.

Si assuma $\sqrt{2}k - g > 0$.

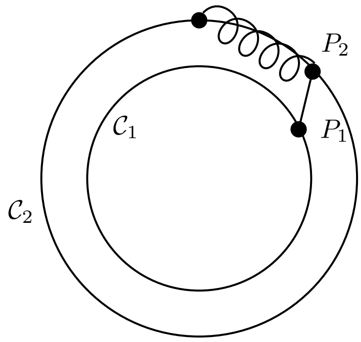


Figura 1: schema del problema.

Svolgimento. Punto 1. Scegliamo come variabili lagrangiane θ e ϕ, rappresentate in figura 2.

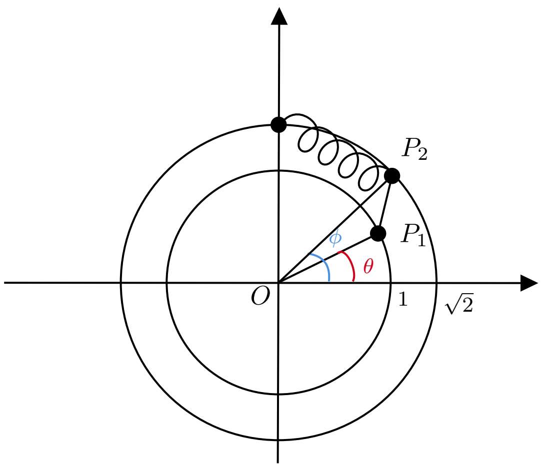


Figura 2: scelta delle variabili lagrangiane.

Per la geometria del problema si ha

$$P_1 = (x_{P_1}, y_{P_1}) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

e

$$P_2 \equiv (x_{P_2}, y_{P_2}) = \sqrt{2}(\cos\phi, \sin\phi),$$

dove $\theta \in \mathbb{R}$ e $\phi \in \mathbb{R}$. Le velocità di P_1 e P_2 sono rispettivamente

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{P_1} = (-\dot{\theta}\sin\theta, \dot{\theta}\cos\theta)$$

e

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{P_2} = \sqrt{2}\left(-\dot{\phi}\sin\phi, \dot{\phi}\cos\phi\right).$$

Calcoliamo i moduli quadri delle velocità di P_1 e P_2, che sono rispettivamente

$$|\dot{\boldsymbol{r}}_{P_1}|^2 = \dot{\theta}^2 \tag{1}$$

e

$$|\dot{\boldsymbol{r}}_{P_2}|^2 = 2\dot{\phi}^2. \tag{2}$$

Osserviamo che il triangolo OP_1P_2 è isoscele, poiché $\overline{OP_1} = \overline{OP_2}$.

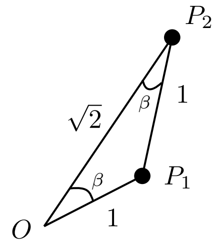


Figura 3: triangolo isoscele.

Quindi si ha

$$\beta = \phi - \theta,$$

ed applicando il teorema di Carnot abbiamo

$$1 = 2 + 1 - 2\sqrt{2}\cos\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\pi}{4}.$$

Inoltre, abbiamo

$$\beta = \frac{\pi}{4} = \phi - \theta \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = \dot{\theta}.$$

Dunque, da quanto ottenuto, lo studio del sistema si riduce ad una sola variabile lagrangiana. Scegliamo come variabile lagrangiana θ. L'energia cinetica del sistema è

$$\begin{aligned} T(\dot{\theta}) &= \frac{1}{2}m_1|\dot{\boldsymbol{r}}_{P_1}|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{\boldsymbol{r}}_{P_2}|^2 = \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(2\dot{\phi}^2\right) = \\ &= \frac{3}{2}\dot{\theta}^2, \end{aligned} \tag{3}$$

dove abbiamo sostituito $m_1 = m_2 = m = 1$ e sfruttato i risultati a cui siamo pervenuti nelle equazioni (1) e (2). L'energia potenziale del sistema è

$$U(\theta) = m_1 g y_{P_1} + m_2 g y_{P_2} + \frac{1}{2}k\overline{FP_2}^2 + \text{cost}, \tag{4}$$

dove $\overline{FP_2}$ è la lunghezza della molla, $y_{P_1} = \sin\theta$ e $y_{P_2} = \sqrt{2}\sin\phi = \sqrt{2}\sin(\theta + \pi/4)$. Sapendo che $P_2 \equiv \sqrt{2}(\cos\phi, \sin\phi)$ e $F = (0, \sqrt{2})$, si ottiene $\overline{FP_2}^2 = 2\cos^2\phi + 2(1-\sin\phi)^2 = 4 - 4\sin\phi$; pertanto la relazione (4) diventa

$$\begin{aligned} U(\theta) &= g\sin\theta + \sqrt{2}g\sin(\theta + \pi/4) + \frac{4}{2}k(1 - \sin\phi) + \text{cost} = \\ &= g\sin\theta + \sqrt{2}g\left(\sqrt{2}/2\cos\theta + \sqrt{2}/2\sin\theta\right) + 2k(1 - \sin(\theta + \pi/4)) + \text{cost} = \\ &= g\sin\theta + g\cos\theta + g\sin\theta + 2k\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right) + \text{cost} = \\ &= g\sin\theta + g\cos\theta + g\sin\theta + 2k - \sqrt{2}k\sin\theta - \sqrt{2}k\cos\theta + \text{cost} = \\ &= \sqrt{2}\sin\theta(\sqrt{2}g - k) + \cos\theta(g - \sqrt{2}k) + \text{cost}. \end{aligned} \tag{5}$$

Sfruttando le equazioni (3) e (5) è possibile determinare la lagrangiana del sistema, cioè

$$\mathcal{L}(\theta,\dot{\theta}) = T(\dot{\theta}) - U(\theta) = \frac{3}{2}\dot{\theta}^2 - \sqrt{2}\sin\theta(\sqrt{2}g - k) - \cos\theta(g - \sqrt{2}k) + \text{cost.} \tag{6}$$

Si conclude che la lagrangiana è

$$\boxed{\mathcal{L}(\theta,\dot{\theta}) = \frac{3}{2}\dot{\theta}^2 - \sqrt{2}\sin\theta(\sqrt{2}g - k) - \cos\theta(g - \sqrt{2}k) + \text{cost.}}$$

Punto 2. Determiniamo l'equazioni di Eulero-Lagrange, cioè

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}(\theta,\dot{\theta})}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}(\theta,\dot{\theta})}{\partial\theta}, \tag{7}$$

da cui

$$\boxed{3\ddot{\theta} = \sqrt{2}\cos\theta\left(k - \sqrt{2}g\right) + \sin\theta\left(g - \sqrt{2}k\right).}$$

Punto 3. Calcoliamo $U'(\theta)$ dove U è stata calcolata nell'equazione (5). Poniamo

$$\frac{dU(\theta)}{d\theta} = \sqrt{2}\cos\theta(\sqrt{2}g - k) + \sin\theta(\sqrt{2}k - g) = 0, \tag{8}$$

dove $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\phi \in [0, 2\pi)$. Osserviamo che $\theta = \pi/2$ e $3\pi/2$ non sono soluzione dell'equazione perché vale la condizione $\sqrt{2}k - g > 0$.
Sotto tale condizione, possiamo dividere ambo i membri dell'equazione per $\cos\theta$, ottenendo

$$\tan\theta(\sqrt{2}k - g) = \sqrt{2}(k - \sqrt{2}g) \quad\Rightarrow\quad \tan\theta = \frac{\sqrt{2}(k - \sqrt{2}g)}{\sqrt{2}k - g} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha.$$

Bisogna considerare tre casi.

- **Caso 1:** se $\alpha > 0$ le radici dell'equazione in $[0, 2\pi)$ sono

$$\theta_1 = \arctan\alpha \qquad \text{e} \qquad \theta_2 = \pi + \arctan\alpha.$$

- **Caso 2:** se $\alpha < 0$ le radici dell'equazione in $[0, 2\pi)$ sono

$$\theta_3 = \arctan\alpha \qquad \text{e} \qquad \alpha_4 = \pi + \arctan\alpha.$$

- **Caso 3:** se $\alpha = 0$ le radici dell'equazione in $[0, 2\pi)$ sono

$$\theta_5 = 0 \qquad \text{e} \qquad \theta_6 = \pi.$$

Calcoliamo la derivata seconda del potenziale, cioè

$$\begin{aligned}
\frac{d^2U(\theta)}{d\theta^2} &= -\sqrt{2}\sin\theta(\sqrt{2}g - k) + \cos\theta(\sqrt{2}k - g) = && (9)\\
&= \cos\theta(\sqrt{2}k - g)\left(\tan\theta\frac{\sqrt{2}(k - \sqrt{2}g)}{\sqrt{2}k - g} + 1\right) = && (10)\\
&= \cos\theta(\sqrt{2}k - g)(1 + \alpha\tan\theta) = && (11)\\
&= \underbrace{(1 + \alpha^2)(\sqrt{2}k - g)}_{>0}\cos\theta. && (12)
\end{aligned}$$

Se $\alpha > 0$ abbiamo

$$\frac{d^2U(\theta_1)}{d\theta^2} > 0$$

e quindi θ_1 è un minimo, ovvero un punto di equilibrio stabile. Inoltre,

$$\frac{d^2U(\theta_2)}{d\theta^2} < 0$$

e quindi θ_2 è un massimo, ovvero un punto di equilibrio instabile.
Se $\alpha < 0$ abbiamo

$$\frac{d^2U(\theta_3)}{d\theta^2} < 0$$

e quindi θ_3 è un massimo, ovvero un punto di equilibrio instabile. Inoltre,

$$\frac{d^2U(\theta_4)}{d\theta^2} > 0$$

e quindi θ_4 è un minimo, ovvero un punto di equilibrio stabile.
Se $\alpha = 0$ abbiamo

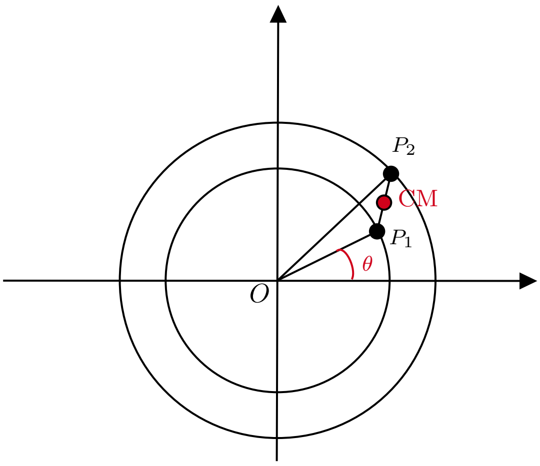
$$\frac{d^2U(\theta_5)}{d\theta^2} = (1+\alpha^2)(\sqrt{2}k - g) > 0$$

e quindi θ_5 è un minimo, ovvero un punto di equilibrio stabile. Inoltre,

$$\frac{d^2U(\theta_6)}{d\theta^2} = -(1+\alpha^2)(\sqrt{2}k - g) < 0$$

e quindi θ_6 è un massimo, ovvero un punto di equilibrio instabile.

Punto 4. Consideriamo ora il caso in cui la massa dell'asta sia $M = 1\,\mathrm{kg}$ e sia distribuita in modo omogeneo.



Ricordiamo che per la geometria del problema si ha

$$P_1 = (x_{P_1}, y_{P_1}) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

e

$$P_2 = (x_{P_2}, y_{P_2}) = \sqrt{2}(\cos(\theta+\pi/4), \sin(\theta+\pi/4)).$$

Il centro di massa dell'asta è il punto medio tra P_1 e P_2, quindi

$$\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} = \left(\frac{\cos\theta + \sqrt{2}\cos(\theta+\pi/4)}{2}, \frac{\sin\theta + \sqrt{2}\sin(\theta+\pi/4)}{2}\right).$$

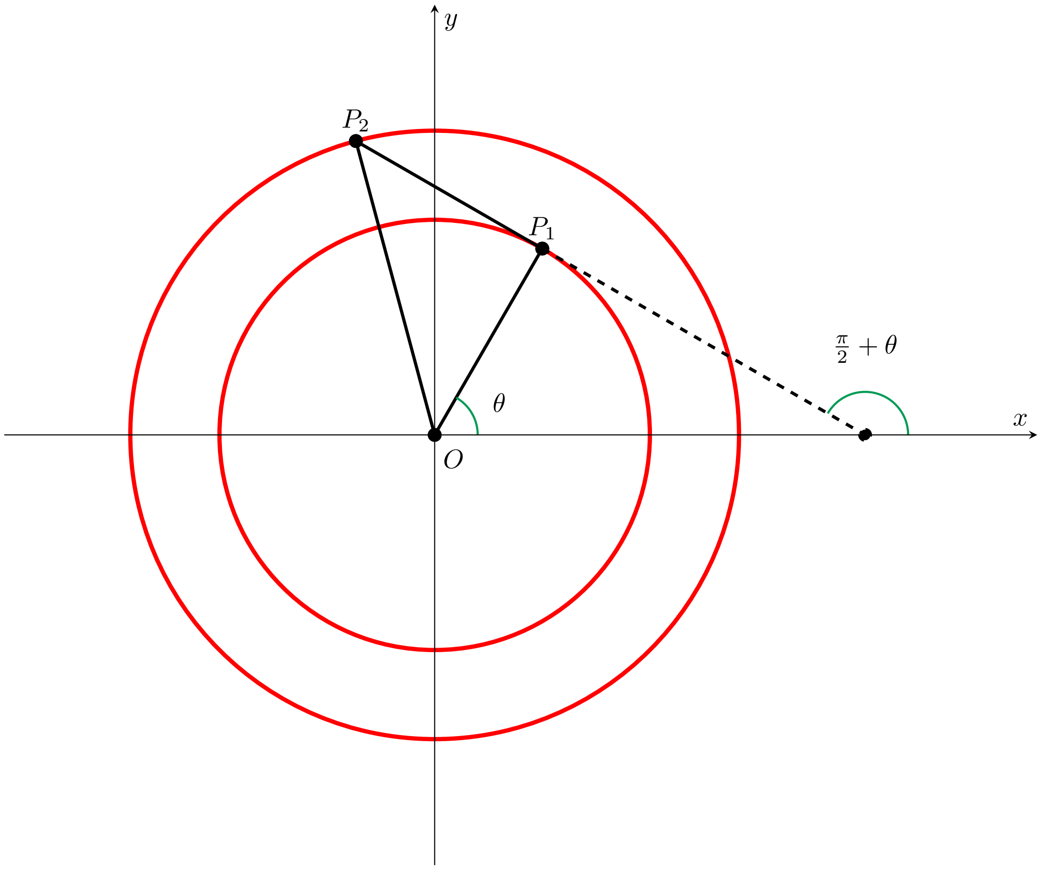
La velocità del centro di massa è

$$\dot{\mathbf{r}}_{\mathrm{CM}} = \dot{\theta}\left(\frac{-\sin\theta - \sqrt{2}\sin(\theta+\pi/4)}{2}, \frac{\cos\theta + \sqrt{2}\cos(\theta+\pi/4)}{2}\right),$$

che ha modulo quadrato

$$
\begin{aligned}
|\dot{\mathbf{r}}_{\mathrm{CM}}|^2 &= \frac{\dot\theta^2}{4}\left((-\sin\theta-\sqrt{2}\sin(\theta+\pi/4))^2+(\cos\theta+\sqrt{2}\cos(\theta+\pi/4))^2\right)= && (13)\\
&= \frac{\dot\theta^2}{4}\left(3+2\sqrt{2}(\cos(\theta+\pi/4)\cos\theta+\sin(\theta+\pi/4)\sin\theta)\right)= && (14)\\
&= \frac{\dot\theta^2}{4}\left(3+2\sqrt{2}\cos(\pi/4)\right)= && (15)\\
&= \frac{5\dot\theta^2}{4}. && (16)
\end{aligned}
$$

Osserviamo che fino ad'ora abbiamo rappresentato il triangolo OP_1P_2 generico, ovvero senza considerare le caratteristiche geometriche reali del problema fisico in esame. In triangolo OP_1P_2 è un triangolo rettangolo isoscele che si rappresenta come nella figura che segue.



L'angolo che l'asta forma con l'asse delle x è $\dfrac{\pi}{2}+\theta$, pertanto la velocità angolare dell'asta sarà $\dot\theta$.
Per il teorema di König l'energia cinetica dell'asta è

$$
\begin{aligned}
T_a &= \frac{1}{2}M|\dot{\mathbf{r}}_{\mathrm{CM}}|^2+\frac{1}{2}I_{\mathrm{CM}}\,\dot\theta^2= && (17)\\
&= \frac{1}{2}M\left(\frac{5\dot\theta^2}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}M\ell^2\,\dot\theta^2\right)\overset{\ell=1}{=} && (18)\\
&\overset{\ell=1}{=}\frac{5}{8}M\dot\theta^2+\frac{1}{24}M\dot\theta^2= && (19)\\
&= \frac{2}{3}M\dot\theta^2. && (20)
\end{aligned}
$$

L'energia potenziale dell'asta è

$$
U_a = Mgy_{\mathrm{CM}} = \frac{Mg}{2}\left(\sin\theta+\sqrt{2}\sin(\theta+\pi/4)\right)+\mathrm{cost.}
$$

Dunque, la nuova lagrangiana del sistema è

$$\tilde{\mathcal{L}}(\theta,\dot\theta) = \mathcal{L}(\theta,\dot\theta) + T_a - U_a = \tag{21}$$

$$= \frac{3}{2}\dot\theta^2 - \sqrt{2}\sin\theta(\sqrt{2}g-k) - \cos\theta(g-\sqrt{2}k) + \frac{2}{3}M\dot\theta^2 - \frac{Mg}{2}\left(\sin\theta + \sqrt{2}\sin(\theta+\pi/4)\right) + \text{cost} = \tag{22}$$

$$= \dot\theta^2\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}M\right) + \sin\theta\left(-\sqrt{2}\left(\sqrt{2}g-k\right) - \frac{Mg}{2}\right) - \cos\theta(g-\sqrt{2}k) - \frac{\sqrt{2}Mg}{2}\sin(\theta+\pi/4) + \text{cost} \overset{M=1}{=} \tag{23}$$

$$\overset{M=1}{=} \dot\theta^2\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right) + \sin\theta\left(-\sqrt{2}\left(\sqrt{2}g-k\right) - \frac{g}{2}\right) - \cos\theta(g-\sqrt{2}k) - \frac{\sqrt{2}g}{2}\sin(\theta+\pi/4) + \text{cost} = \tag{24}$$

$$= \frac{13}{6}\dot\theta^2 + \sin\theta\left(-\sqrt{2}\left(\sqrt{2}g-k\right) - \frac{g}{2}\right) - \cos\theta(g-\sqrt{2}k) - \frac{\sqrt{2}g}{2}\sin(\theta+\pi/4) + \text{cost}. \tag{25}$$

L'equazione di Eulero-Lagrange è

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\tilde{\mathcal{L}}(\theta,\dot\theta)}{\partial\dot\theta}\right) = \frac{\tilde{\mathcal{L}}(\theta,\dot\theta)}{\partial\theta},$$

da cui

$$\frac{13}{3}\ddot\theta = \cos\theta\left(-\sqrt{2}\left(\sqrt{2}g-k\right) - \frac{g}{2}\right) + \sin\theta(g-\sqrt{2}k) - \frac{\sqrt{2}g}{2}\cos(\theta+\pi/4).$$

□

Meccanica razionale – Lagrangiana #9

Esercizio 9 (★★★★☆). Un sistema meccanico è costituito da tre punti materiali P_0, P_1 e P_2 di massa m vincolati a muoversi in un piano, che identificheremo con il piano xy, in modo da soddisfare i seguenti vincoli: il punto P_0 è fisso nell'origine, il punto P_1 si muove lungo la retta $y = 1$ e il punto P_2 è collegato al punto P_1 tramite un'asta di lunghezza ℓ e massa trascurabile. Inoltre due molle, entrambe di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collegano i punti P_1 e P_2 al punto P_0. I punti sono infine sottoposti alla forza di gravità, diretta verso il basso lungo l'asse y; sia g l'accelerazione di gravità.

1) Scrivere la lagrangiana del sistema usando come coordinate lagrangiane l'ascissa x di P_1 e l'angolo θ che l'asta forma rispetto all'asse x.

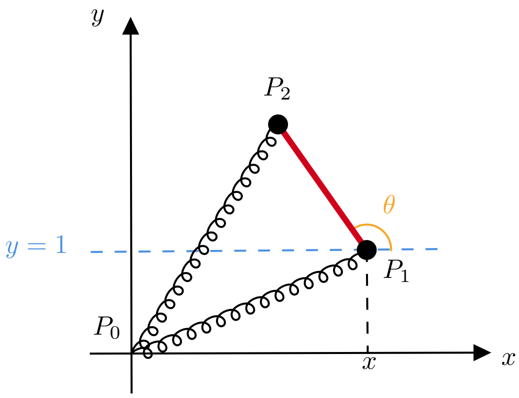
2) Scrivere le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.

3) Determinare le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri positivi m, g e k.

4) Se ne discuta la stabilità al variare dei parametri.

5) Verificare che, se il punto P_1 viene fissato nella configurazione $x = 0$ il sistema si riduce ad un sistema unidimensionale e si determinino le equazioni di Eulero-Lagrange.

6) Supporre infine, nel caso in cui il punto P_1 sia libero di muoversi lungo l'asse $y = 1$, che l'asta sia omogenea e abbia massa M: scrivere la lagrangiana del sistema, determinare le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare dei parametri positivi m, g, k e M.



Svolgimento. Punto 1. Per la geometria del problema abbiamo

$$
\begin{aligned}
P_0 &= (x_P, y_P) = (0,0)\\
P_1 &= (x_{P_1}, y_{P_1}) = (x,1)
\end{aligned}
$$

e

$$P_2 = (x_{P_2}, y_{P_2}) = (x - \ell\cos(\pi-\theta), 1 + \ell\sin(\pi-\theta)) = (x + \ell\cos\theta, \ell\sin\theta).$$

Le velocità dei punti P_1 e P_2 sono rispettivamente

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{P_1} = (\dot{x}, 0)$$

e

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{P_2} = (\dot{x} - \ell\dot{\theta}\sin\theta, \ell\dot{\theta}\cos\theta),$$

da cui

$$|\dot{\boldsymbol{r}}_{P_1}|^2 = \dot{x}^2$$

e

$$|\dot{\boldsymbol{r}}_{P_2}|^2 = \left(\dot{x} - \ell\dot{\theta}\sin\theta\right)^2 + \ell^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta = \dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 - 2\dot{x}\ell\dot{\theta}\sin\theta.$$

L'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}m\left(|\dot{\boldsymbol{r}}_{P_1}|^2 + |\dot{\boldsymbol{r}}_{P_2}|^2\right), \tag{1}$$

cioè
$$T=\frac{1}{2}m\left(2\dot{x}^2++\ell^2\dot{\theta}^2-2\dot{x}\ell\dot{\theta}\sin\theta\right)=m\dot{x}^2-m\dot{x}\dot{\theta}\ell\sin\theta+\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2. \tag{2}$$
L'energia potenziale del sistema è
$$U=my_{P_1}+my_{P_2}+\frac{1}{2}k\left(\overline{P_0P_1}^2+\overline{P_0P_2}^2\right), \tag{3}$$
dove $\overline{P_0P_1}$ e $\overline{P_0P_2}$ sono le distanze di P_0 rispettivamente da P_1 e P_2. .
Determiniamo
$$\overline{P_0P_1}^2=x^2+1 \qquad \overline{P_0P_2}^2=(x+\ell\cos\theta)^2+(\ell\sin\theta+1)^2=x^2+\ell^2+2x\ell\cos\theta+2\ell\sin\theta+1,$$
conseguentemente
$$U=mg\ell\sin\theta+k(x^2+x\ell\cos\theta+\ell\sin\theta)+\text{costante}. \tag{4}$$
La lagrangiana è
$$\mathcal{L}(x,\dot{x},\theta,\dot{\theta})=T(\dot{x},\theta,\dot{\theta})-U(x,\theta)=m\dot{x}^2-m\dot{x}\dot{\theta}\ell\sin\theta+\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2-mg\ell\sin\theta-k(x^2+x\ell\cos\theta+\ell\sin\theta)+\text{costante}.$$
Si conclude che la lagrangiana è
$$\boxed{\mathcal{L}(x,\dot{x},\theta,\dot{\theta})=m\dot{x}^2-m\dot{x}\dot{\theta}\ell\sin\theta+\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2-mg\ell\sin\theta-k(x^2+x\ell\cos\theta+\ell\sin\theta)+\text{costante}\,.}$$
Punto 2. Calcoliamo le equazioni di Eulero-Lagrange. Abbiamo dunque
$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right)=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\\[2ex]\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right)=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta},\end{cases} \tag{5}$$
da cui segue
$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(2m\dot{x}-m\dot{\theta}\ell\sin\theta\right)=-k(2x+\ell\cos\theta)\\[2ex]\dfrac{d}{dt}\left(-m\dot{x}\ell\sin\theta+m\ell^2\dot{\theta}\right)=-mg\ell\cos\theta+kx\ell\sin\theta-k\ell\cos\theta-m\dot{x}\dot{\theta}\ell\cos\theta,\end{cases}$$
e quindi
$$\begin{cases}2m\ddot{x}-m\ddot{\theta}\ell\sin\theta-m\dot{\theta}^2\ell\cos\theta=-k(2x+\ell\cos\theta)\\[2ex]-m\ddot{x}\ell\sin\theta+m\ell^2\ddot{\theta}=-mg\ell\cos\theta+kx\ell\sin\theta-k\ell\cos\theta-m\dot{x}\dot{\theta}\ell\cos\theta\end{cases}$$
Si conclude che le equazione di Eulero-Lagrange sono
$$\boxed{\begin{cases}2m\ddot{x}-m\ddot{\theta}\ell\sin\theta-m\dot{\theta}^2\ell\cos\theta=-k(2x+\ell\cos\theta)\\[2ex]-m\ddot{x}\ell\sin\theta+m\ell^2\ddot{\theta}=-mg\ell\cos\theta+kx\ell\sin\theta-k\ell\cos\theta-m\dot{x}\dot{\theta}\ell\cos\theta.\end{cases}}$$
Punto 3. Determiniamo le posizioni di equilibrio. Calcoliamo ∇U, cioè
$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial x}=0\\[2ex]\dfrac{\partial U}{\partial\theta}=0\end{cases}$$
da cui
$$\begin{cases}k(2x+\ell\cos\theta)=0\\[2ex]mg\ell\cos\theta+k(-x\ell\sin\theta+\ell\cos\theta)=0,\end{cases}$$

o anche

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\ell}{2}\cos\theta \\ \\ \cos\theta\left(mg + \dfrac{k\ell}{2}\sin\theta + k\right) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Le soluzioni immediate del sistema sono

$$A = (x,\theta) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

e

$$B = (x,\theta) = \left(0, -\frac{\pi}{2}\right).$$

Per trovare le ultime soluzioni di (6) dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\ell}{2}\cos\theta \\ \\ mg + \dfrac{k\ell}{2}\sin\theta + k = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{\ell}{2}\cos\theta \\ \\ \sin\theta = -\dfrac{2(mg+k)}{k\ell} =: -\alpha. \end{cases}$$

Osserviamo che α per com'è definito è una quantità sempre positiva per ogni valore di m, k. Se $\alpha \in (0,1]$ ha le seguenti soluzioni

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\ell}{2}\cos\arcsin\alpha \\ \\ \theta = -\arcsin\alpha \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad C = \left(-\frac{\ell}{2}\cos\arcsin\alpha, -\arcsin\alpha\right)$$

e

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\ell}{2}\cos(-\pi + \arcsin\alpha) = \dfrac{\ell}{2}\cos\arcsin\alpha \\ \\ \theta = \arcsin\alpha - \pi \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad D = \left(\frac{\ell}{2}\cos\arcsin\alpha, \arcsin\alpha - \pi\right).$$

Se invece $\alpha > 1$ il sistema è impossibile. Calcoliamo la matrice Hessiana per determinare la natura dei punti di equilibrio trovati. Abbiamo dunque

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial\theta} \\ \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial\theta\partial x} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} \end{pmatrix}$$

e poichè $U(x,\theta)$ verifica le ipotesi del teorema di Schwartz vale che

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial\theta} = \frac{\partial^2 U}{\partial\theta\partial x}.$$

Abbiamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = k(2x + \ell\cos\theta) \\ \\ \dfrac{\partial U}{\partial\theta} = mg\ell\cos\theta + k(-x\ell\sin\theta + \ell\cos\theta) = \ell\cos\theta(mg+k) - kx\ell\sin\theta, \end{cases}$$

per questo motivo

$$H = \begin{pmatrix} 2k & -k\ell\sin\theta \\ \\ -k\ell\sin\theta & -\ell\sin\theta(mg+k) - kx\ell\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il determinante di H, ovvero

$$\det H = -2k\ell\left(\sin\theta(mg+k) + kx\cos\theta\right) - k^2\ell^2\sin^2\theta.$$

Valutiamo

$$H(A) = \begin{pmatrix} 2k & k\ell \\ k\ell & -\ell(mg+k) \end{pmatrix}$$

e

$$\det H(A) = -2k(mg\ell + k\ell) - k^2\ell^2 = -k^2\ell^2\left(\frac{2(mg+k)}{k\ell} + 1\right) = -k^2\ell^2(\alpha+1) < 0, \qquad \forall\, \alpha \in (0, +\infty);$$

pertanto il punto A è un punto di sella e quindi un punto di equilibrio instabile.
Valutiamo

$$H(B) = \begin{pmatrix} 2k & k\ell \\ k\ell & \ell(mg+k) \end{pmatrix}$$

e

$$\det H(B) = 2k\ell(mg+k) - k^2\ell^2 = k\ell(2(mg+k) - k\ell) = k^2\ell^2\left(\frac{2(mg+k)}{k\ell} - 1\right) = k^2\ell^2(\alpha - 1).$$

Se $\alpha > 1$ allora $\det H(B) > 0$ e dato $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(B) > 0$ deduciamo che B è un punto di minimo, cioè un punto di equilibrio stabile.
Se $\alpha < 1$ deduciamo che B è un punto di sella, cioè un punto di equilibrio instabile.
Se $\alpha = 1$ il determinante dell'hessiano è nullo quindi la natura del punto $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ richiede un supplemento d'indagine.
Valutiamo

$$H\,(C) = \begin{pmatrix} 2k & k\ell\alpha \\ & \\ k\ell\alpha & \ell\alpha(mg+k) + k\dfrac{\ell^2}{2}\cos^2\arcsin\alpha \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned}
\det H\,(C) &= 2k\left(\ell\alpha(mg+k) + k\frac{\ell^2}{2}\cos^2\arcsin\alpha\right) - k^2\ell^2\alpha^2 = \\
&= 2k\left(\ell\alpha(mg+k) + k\frac{\ell^2}{2}\left(1-\alpha^2\right)\right) - k^2\ell^2\alpha^2 = \\
&= k\left(2\ell\alpha(mg+k) + k\ell^2\left(1-\alpha^2\right)\right) - k^2\ell^2\alpha^2 = \\
&= k\ell\left(2mg\alpha + 2k\alpha + k\ell - 2k\ell\alpha^2\right) = \\
&= k^2\ell^2\left(2\alpha(mg+k) + k\ell(1-2\alpha^2)\right) = \\
&= k^2\ell^2\left(1-\alpha^2\right).
\end{aligned}$$

Se $\alpha \in (0,1)$ si ha $\det H\,(C) < 0$ e poiché $\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}(C) = 2k > 0$ il punto C è un punto di minimo, pertanto è un punto di equilibrio stabile.
Il caso $\alpha > 1$ non va studiato perché il sistema risulta impossibile. Studiamo la natura del punto D.
Valutiamo

$$\begin{aligned}
H(D) &= \begin{pmatrix} 2k & k\ell\alpha \\ k\ell\alpha & \ell\alpha(mg+k) + \dfrac{k\ell^2}{2}\cos^2\arcsin\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2k & k\ell\alpha \\ & \\ k\ell\alpha & \ell\alpha(mg+k) + \dfrac{k\ell^2}{2}(1-\alpha^2) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\det H(D) &= 2k\ell\left(\alpha(mg+k) - \frac{k\ell^2}{2}(1-\alpha^2)\right) - k^2\ell^2\alpha^2 = \\
&= k^2\ell^2\left(\alpha\,\frac{2(mg+k)}{k\ell} + 1 - \alpha^2 - \alpha^2\right) = \\
&= k^2\ell^2(1-\alpha^2) > 0
\end{aligned}$$

Sappiamo che $\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(D) > 0$ per ogni $\alpha \in (0,1)$ quindi il punto D è un punto di minimo, cioè un punto di equilibrio stabile.

Non ci rimane che studiare il caso $\alpha = 1$ per tutti i punti studiati poiché l'hessiano è nullo e non possiamo arrivare ad alcuna conclusione.
Consideriamo dapprima il punto B e sostituendo $\alpha = 1$ nel potenziale otteniamo

$$\begin{aligned} U &= \frac{k}{2}(\ell - 2)\ell \sin\theta + k\left(x^2 + x\ell\cos\theta + \ell\sin\theta\right) = \\ &= \frac{k\ell^2\sin\theta}{2} + kx(x + \ell\cos\theta). \end{aligned}$$

Osserviamo che, per ogni (x, θ) si ha

$$\begin{aligned} U(x,\theta) =& \frac{k\ell^2\sin(\theta)}{2} + k\left(x^2 + \ell x\cos\theta + \frac{\ell^2\cos^2\theta}{4}\right) - \frac{k\ell^2\cos^2\theta}{4} \\ =& \frac{k\ell^2\sin(\theta)}{2} + \frac{k\ell^2\sin^2\theta}{4} - \frac{k\ell^2}{4} + k\left(x + \frac{\ell\cos\theta}{2}\right)^2 \\ =& \frac{k\ell^2}{4}\left(\sin^2\theta + 2\sin\theta + 1\right) - \frac{k\ell^2}{2} + k\left(x + \frac{\ell\cos\theta}{2}\right)^2 \\ =& -\frac{k\ell^2}{2} + \frac{k\ell^2}{4}(\sin\theta + 1)^2 + k\left(x + \frac{\ell\cos\theta}{2}\right)^2, \end{aligned} \tag{7}$$

Da ciò segue che per ogni (x, θ) si ha

$$U(x,\theta) \geq -\frac{k\ell^2}{2} = U\left(0, -\frac{\pi}{2}\right), \tag{8}$$

cioè il punto $B = \left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ è di minimo assoluto per U e quindi è di equilibrio stabile per il sistema.
Notiamo che per $\alpha = 1$ i punti

$$\left(-\frac{\ell}{2}\cos\arcsin\alpha, -\arcsin\alpha\right)$$

e

$$\left(\frac{\ell}{2}\cos\arcsin\alpha, \arcsin\alpha - \pi\right),$$

diventano rispettivamente

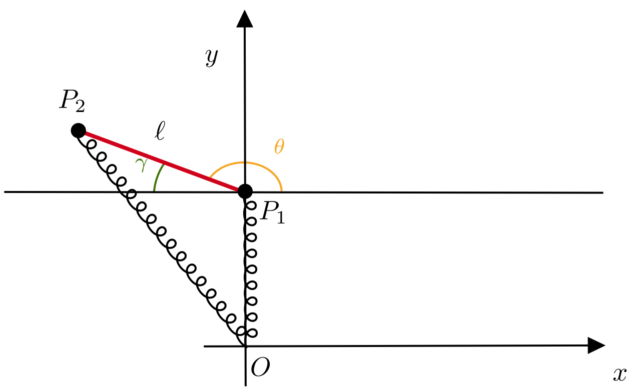
$$\left(-\frac{\ell}{2}\cos\arcsin 1, -\arcsin 1\right) = \left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$$

e

$$\left(\frac{\ell}{2}\cos\arcsin 1, \arcsin 1 - \pi\right) = \left(0, -\frac{\pi}{2}\right),$$

che abbiamo appena studiato. Questo conclude lo studio della natura dei punti stazionari.

Punto 4. D'ora in poi il punto P_1 sarà vincolato a muoversi lungo la retta $x = 0$. Rappresentiamo la situazione descritta nella figura che segue.



Dalla geometria abbiamo

$$P_1 = (0, y) = (0, 1) \qquad \text{e} \qquad P_2 = (-\ell\cos\gamma, \ell\sin\gamma + 1) = (-\ell\cos(\pi-\theta), \ell\sin(\pi-\theta)+1) = (\ell\cos\theta, \ell\sin\theta+1).$$

Le velocità di P_1 e P_2 sono rispettivamente

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{P_1} = (0, 0)$$

e

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{P_2} = \left(-\ell\dot\theta\sin\theta, \ell\dot\theta\cos\theta\right),$$

da cui i moduli quadri di P_1 e P_2 sono rispettivamente

$$|\dot{\boldsymbol{r}}_{P_1}|^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad |\dot{\boldsymbol{r}}_{P_2}|^2 = \ell^2\dot\theta^2.$$

L'energia cinetica del sistema e l'energia potenziale del sistema sono rispettivamente

$$T = \frac{1}{2}m(|\dot{\boldsymbol{r}}_{P_1}|^2 + |\dot{\boldsymbol{r}}_{P_2}|^2) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot\theta^2$$

e

$$U = mg + mg(\ell\sin\theta + 1) + \frac{1}{2}k\left(\overline{OP_1}^2 + \overline{OP_2}^2\right) + \text{costante},$$

dove $\overline{OP_1}^2 = 1$ e $\overline{OP_2}^2 = \ell^2 + 1 + 2\ell\sin\theta$. La lagrangiana del sistema è

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\theta, \dot\theta) &= \frac{1}{2}m\dot\theta^2 - \left(mg + mg(\ell\sin\theta + 1) + \frac{1}{2}k\left(\overline{OP_1}^2 + \overline{OP_2}^2\right)\right) + \text{costante} = \\
&= \frac{1}{2}m\dot\theta^2 - \left(mg + mg(\ell\sin\theta + 1) + \frac{1}{2}k\left(1 + \ell^2 + 1 + 2\ell\sin\theta\right)\right) + \text{costante} = \\
&= \frac{1}{2}m\dot\theta^2 - \left(mg\ell\sin\theta + \frac{1}{2}k\left(2\ell\sin\theta\right)\right) + \text{costante} = \\
&= \frac{1}{2}m\dot\theta^2 - mg\ell\sin\theta - \frac{1}{2}k\ell\sin\theta + \text{costante}.
\end{aligned}$$

L'equazione di Eulero-Lagrange è

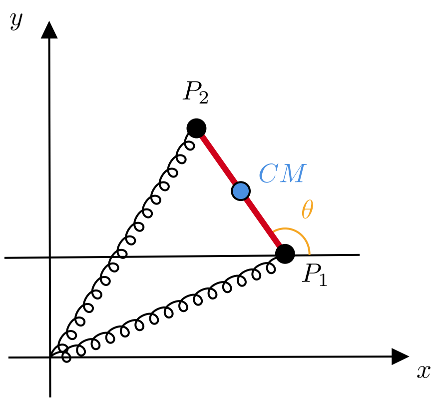
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}$$

da cui

$$m\ddot\theta = -\ell\cos\theta(mg+k) = -\ell(mg+k)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right). \tag{9}$$

L'equazione (9) è l'equazione di un pendolo semplice, pertanto il sistema si comporta come un pendolo semplice.

Punto 5. In questa nuova configurazione l'asta non ha massa trascurabile, in particolare la massa M distribuita in modo omogeneo lungo tutta la lunghezza dell'asta. Nella figura che segue rappresentiamo il centro di massa CM.



Il centro di massa è

$$\mathrm{CM} = \left(\frac{x + x + \ell\cos\theta}{2}, \frac{1 + \ell\sin\theta + 1}{2}\right) = \left(\frac{2x + \ell\cos\theta}{2}, \frac{2 + \ell\sin\theta}{2}\right).$$

La velocità del centro di massa è

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{CM}} = \left(\dot{x} - \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\sin\theta, \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right).$$

Il modulo quadro della velocità del centro di massa

$$|\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{CM}}|^2 = \left(\dot{x} - \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right)^2 + \frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}^2\cos^2\theta = \dot{x}^2 + \frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}^2 - \ell\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta. \tag{10}$$

L'energia cinetica del sistema è

$$\tilde{T} = T + T_{\text{asta}},$$

dove T è l'energia cinetica trovata nella configurazione precedente e T_{asta} è l'energia cinetica dell'asta. L'energia cinetica dell'asta si può determinare applicando il teorema di könig. Abbiamo

$$T_{\text{asta}} = \frac{1}{2}I_{CM}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\left|\dot{\boldsymbol{r}}_{CM}\right|^2,$$

dove I_{CM} è il momento d'inerzia dell'asta rispetto al proprio centro di massa e vale $1/(12)M\ell^2$, mentre $|\dot{\boldsymbol{r}}_{CM}|^2$ è stato trovato in (10). Abbiamo dunque

$$\begin{aligned}\tilde{T} &= m\dot{x}^2 - m\dot{x}\dot{\theta}\ell\sin\theta + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{24}M\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}^2 - \ell\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right) = \\ &= \dot{x}^2\left(m + \frac{M}{2}\right) + \dot{\theta}^2\ell^2\left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{6}M\right) - \dot{x}\dot{\theta}\ell\sin\theta\left(m + \frac{M}{2}\right).\end{aligned}$$

L'energia potenziale è

$$\begin{aligned}U &= mg\ell\sin\theta + k\left(x^2 + x\ell\cos\theta + \ell\sin\theta\right) + Mg\left(1 + \frac{\ell}{2}\right) + \text{costante} = \\ &= \sin\theta\left(mg\ell + k\ell + Mg\frac{\ell}{2}\right) + k\left(x^2 + x\ell\cos\theta\right) + \text{costante}.\end{aligned}$$

Dunque la lagrangiana è

$$\begin{aligned}&\mathcal{L} = \tilde{T} - U = \\ &= \frac{\dot{x}^2}{2}(2m+M) + \frac{\dot{\theta}^2\ell^2}{6}(3m+M) - \frac{\dot{x}\dot{\theta}\ell\sin\theta}{2}(2m+M) - \ell\sin\theta\left(mg + k + \frac{Mg}{2}\right) - k(x^2 + x\ell\cos\theta) + \text{costante}.\end{aligned}$$

Calcoliamo le equazioni di Eulero-Lagrange. Abbiamo dunque

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}.\end{cases}$$

Calcoliamo i vari termini del sistema separatamente. Si ha

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\left(2m+M\right) - \frac{\dot{\theta}\ell\sin\theta}{2}\left(2m+M\right)\right) = \ddot{x}\left(2m+M\right) - \frac{\ell}{2}\left(2m+M\right)\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right);$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = -k\left(2x + \ell\cos\theta\right);$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}\ell^2}{3}\left(3m+M\right) - \frac{\dot{x}\ell\sin\theta}{2}\left(2m+M\right)\right) = \frac{\ddot{\theta}\ell^2}{3}\left(3m+M\right) - \frac{\ell}{2}\left(2m+M\right)\left(\ddot{x}\sin\theta + \dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right);$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -\frac{\dot{x}\dot{\theta}\ell\cos\theta}{2}\left(2m+M\right) - \ell\cos\theta\left(mg + k + \frac{M}{2}g\right) + kx\ell\sin\theta.$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{cases} \ddot{x}(2m+M) - \dfrac{\ell}{2}(2m+M)(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = -k(2x+\ell\cos\theta) \\ \\ \dfrac{\ddot{\theta}\ell^2}{3}(3m+M) - \dfrac{\ell}{2}(2m+M)\ddot{x}\sin\theta = -\dfrac{\ell}{2}\cos\theta(2mg+2k+Mg) + kx\ell\sin\theta. \end{cases}$$

Determiniamo i punti di equilibrio ponendo $\nabla U = 0$, cioè

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial U}{\partial \theta} = 0, \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} k\,(2x+\ell\cos\theta) = 0 \\ \\ \cos\theta\left(mg\ell + k\ell + Mg\dfrac{\ell}{2}\right) - kx\ell\sin\theta = 0, \end{cases}$$

perciò

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\ell}{2}\cos\theta \\ \\ \cos\theta\left(mg\ell + k\ell + Mg\dfrac{\ell}{2}\right) + \dfrac{\ell^2}{2}\sin\theta\cos\theta = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Si osserva immediatamente che

$$A_{1,2} = (x,\theta) = \left(0, \pm\frac{\pi}{2}\right),$$

sono soluzioni di (11).
Da (11) si ha

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\ell}{2}\cos\theta \\ \\ mg\ell + k\ell + Mg\dfrac{\ell}{2} + k\dfrac{\ell^2}{2}\sin\theta = 0, \end{cases}$$

per cui

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\ell}{2}\cos\theta \\ \sin\theta = -\dfrac{2}{\ell}\left(\dfrac{g}{k}\left(m+\dfrac{M}{2}\right)+1\right) =: -\alpha. \end{cases} \tag{12}$$

Si osserva immediatamente che affinché (12) sia compatibile deve valere $0 < \alpha \leq 1$.
Le soluzioni del sistema sono

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\ell}{2}\cos(\arcsin\alpha) \\ \\ \theta = -\arcsin\alpha \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\ell}{2}\cos(\arcsin\alpha - \pi) = \dfrac{\ell}{2}\cos(\arcsin\alpha) \\ \\ \theta = \arcsin\alpha - \pi. \end{cases}$$

Definiamo

$$A_3 = \left(-\frac{\ell}{2}\cos\arcsin\alpha, -\arcsin\alpha\right) \qquad \text{e} \qquad A_4 = \left(\frac{\ell}{2}\cos\arcsin\alpha, \arcsin\alpha - \pi\right).$$

Calcoliamo la matrice Hessiana per U, cioè

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} \\ \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial x} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k & -k\ell \sin\theta \\ \\ -k\ell\sin\theta & -\sin\theta \left(mg\ell + k\ell + Mg\dfrac{\ell}{2} \right) - kx\ell\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il determinante della matrice Hessiana, ovvero

$$\det H = -2k \left(\ell \sin\theta \left(mg + k + \frac{Mg}{2} \right) \right) - k^2\ell^2 \sin^2\theta.$$

Valutiamo

$$H(A_1) = \begin{pmatrix} 2k & -k\ell \\ -k\ell & -\ell \left(mg + k + \dfrac{Mg}{2} \right) \end{pmatrix}$$

e

$$\det A_1 = -2k\ell \left(mg + k + \frac{Mg}{2} \right) - k^2\ell^2 < 0.$$

Il punto A_1 è un punto di sella, ovvero un punto di equilibrio instabile.
Valutiamo

$$H(A_2) = \begin{pmatrix} 2k & k\ell \\ k\ell & \ell \left(mg + k\dfrac{Mg}{2} \right) \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} \det A_2 &= 2k\ell \left(mg + k + \frac{Mg}{2} \right) - k^2\ell^2 = \\ &= k^2\ell^2 \left(\frac{2}{k\ell} \left(mg + k + \frac{Mg}{2} \right) - 1 \right) = \\ &= k^2\ell^2 \left(\frac{2}{\ell} \left(\frac{g}{k} \left(m + \frac{M}{2} \right) + 1 \right) - 1 \right) = \\ &= k^2\ell^2(\alpha - 1). \end{aligned}$$

Se $\alpha > 1$ il punto A_2 è un punto di sella, ovvero un punto di equilibrio instabile; se $\alpha = 1$ lo studio del punto A_2 richiede un ulteriore indagine poiché l'hessiano è nullo; infine se $0 < \alpha < 1$ il determinante è positivo e $\partial^2 U/\partial x^2(A_2) = k > 0$, pertanto A_2 è un punto di minimo, cioè un punto di equilibrio instabile.
Poniamo $\alpha = 1$, vale a dire

$$\frac{2}{\ell} \left(1 + \frac{g}{k} \left(m + \frac{M}{2} \right) \right) = 1,$$

da cui il potenziale diventa

$$\begin{aligned} U &= \sin\theta \left(k\ell + g\ell \left(m + \frac{M}{2} \right) \right) + k\left(x^2 + x\ell\cos\theta\right) = \\ &= k\ell \sin\theta \left(1 + \frac{g}{k} \left(m + \frac{M}{2} \right) \right) + k\left(x^2 + x\ell\cos\theta\right) = \\ &= \frac{k\ell^2}{2} \sin\theta + k(x^2 + x\ell\cos\theta). \end{aligned}$$

Esattamente con gli stessi calcoli in (7), si ottiene

$$U(x, \theta) = -\frac{k\ell^2}{2} + \frac{k\ell^2}{4}(\sin\theta + 1)^2 + k\left(x + \frac{\ell\cos\theta}{2} \right)^2. \tag{13}$$

Similmente segue che per ogni (x, θ) si ha

$$U(x, \theta) \geq -\frac{k\ell^2}{2} = U\left(0, -\frac{\pi}{2}\right), \tag{14}$$

cioè il punto $A_2 = \left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ è di minimo assoluto per U e quindi è di equilibrio stabile per il sistema.

Studiamo adesso la natura del punto A_3, calcolando

$$H(A_3)=\begin{pmatrix} 2k & k\ell\alpha \\ \\ k\ell\alpha & \alpha\ell\left(mg+k+\dfrac{Mg}{2}\right)+\dfrac{k\ell^2}{2}\cos^2\arcsin\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2k & 2k\alpha \\ \\ k\ell\alpha & \alpha\ell\left(mg+k+\dfrac{Mg}{2}\right)+\dfrac{k\ell^2}{2}(1-\alpha^2) \end{pmatrix},$$

da cui

$$\begin{aligned}
\det H(A_3) &= k\ell\left(2\alpha\left(mg+k\frac{Mg}{2}\right)+\frac{k\ell}{2}(1-\alpha^2)\right)-k^2\ell^2\alpha^2=\\
&= k\ell\left(2\alpha\left(mg+k+\frac{Mg}{2}\right)+k\ell\left(1-\alpha^2\right)-k\ell\alpha^2\right)=\\
&= k\ell\left(2\alpha\left(mg+k+\frac{Mg}{2}\right)+k\ell\left(1-\alpha^2\right)-k\ell\alpha^2\right)=\\
&= k^2\ell^2\left(\frac{2\alpha}{k\ell}\left(mg+k+\frac{Mg}{2}\right)+1-2\alpha^2\right)=\\
&= k^2\ell^2\left(\alpha^2+1-2\alpha^2\right)=\\
&= k^2\ell^2(1-\alpha^2)=\\
&= \underbrace{k^2\ell^2(1+\alpha)}_{>0}(1-\alpha).
\end{aligned}$$

Se $0<\alpha<1$ abbiamo $\det H(A_3)>0$, pertanto A_3 è un punto di equilibrio instabile perché $\partial^2U/\partial x^2(C)>0$. Se $\alpha=1$ il determinante dello hessiano è nullo, pertanto lo studio della natura del punto A_3 richiede un ulteriore indagine; a tal proposito osserviamo che se sostituiamo $\alpha=1$ in A_3 diventa $A_3=(0,-\pi/2)$, già studiato in precedenza, ovvero il punto $A_3\equiv A_1$ nel caso in cui l'hessiano è nullo, pertanto è un punto di equilibrio stabile. Il caso $\alpha>1$ non va studiato perché non è compatibile con le condizioni di esistenza. Non ci rimane che studiare il punto D.
Valutiamo

$$\begin{aligned}
H(A_4)&=\begin{pmatrix} 2k & -k\ell\sin(\arcsin\alpha-\pi) \\ \\ k\ell\sin(\arcsin\alpha-\pi) & -\ell\sin(\arcsin\alpha-\pi)\left(mg+k+\dfrac{Mg}{2}\right)-\dfrac{k\ell^2}{2}\cos\arcsin\alpha\,\cos(\arcsin\alpha-\pi) \end{pmatrix}=\\
&=\begin{pmatrix} 2k & k\ell\sin\arcsin\alpha \\ \\ k\ell\sin\arcsin\alpha & \ell\sin\arcsin\alpha\left(mg+k+\dfrac{Mg}{2}\right)+\dfrac{k\ell^2}{2}\cos\arcsin\alpha\,\cos\arcsin\alpha \end{pmatrix}=\\
&=\begin{pmatrix} 2k & k\ell\alpha \\ \\ k\ell\alpha & \ell\alpha\left(mg+k+\dfrac{Mg}{2}\right)+\dfrac{k\ell^2}{2}\cos^2\arcsin\alpha \end{pmatrix}=\\
&=\begin{pmatrix} 2k & k\ell\alpha \\ \\ k\ell\alpha & \ell\alpha\left(mg+k+\dfrac{Mg}{2}\right)+\dfrac{k\ell^2}{2}\left(1-\sin^2\arcsin\alpha\right) \end{pmatrix}=\\
&=\begin{pmatrix} 2k & k\ell\alpha \\ \\ k\ell\alpha & \ell\alpha\left(mg+k+\dfrac{Mg}{2}\right)+\dfrac{k\ell^2}{2}\left(1-\alpha^2\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\det H(A_4) &= 2k\ell\alpha\left(mg + k + \frac{Mg}{2}\right) + k^2\ell^2(1-\alpha^2) - k^2\ell^2\alpha^2 = \\
&= k^2\ell^2\left(\frac{2\alpha}{k\ell}\left(mg + k + \frac{Mg}{2}\right) + 1 - \alpha^2 - \alpha^2\right) = \\
&= k^2\ell^2\left(\alpha^2 + 1 - 2\alpha^2\right) = \\
&= k^2\ell^2\left(1 - \alpha^2\right) = \\
&= \underbrace{k^2\ell^2(1+\alpha)}_{>0}(1-\alpha)
\end{aligned}
$$

Sappiamo che $\alpha \in (0,1)$ per la condizione di esistenza, allora sotto le suddette condizioni il determinante è positivo e, inoltre, sapendo che $\partial^2 U/\partial x^2(A_4) = 2k > 0$, possiamo concludere per il criterio di Sylvester che il punto A_4 è un punto di minimo ovvero un punto di equilibrio stabile. Il caso $\alpha = 1$ rende il determinante nullo, pertanto lo studio della natura del punto D richiede un'ulteriore indagine. Con $\alpha = 1$ otteniamo $A_4 = (0, -\pi/2)$ già studiato in precedenza; pertanto per $\alpha = 1$ il punto A_4 risulta essere un punto di equilibrio stabile.

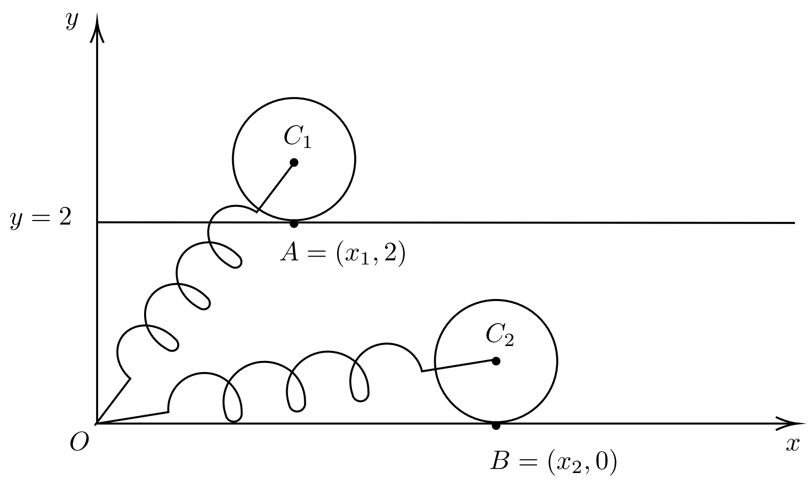
$\square$

Meccanica razionale – Lagrangiana #11

Esercizio 11 (★★★☆☆). Un punto materiale P di massa m si muove su un piano verticale soggetto alla forza di gravità (sia $\boldsymbol{g}$ l'accelerazione di gravità). Il punto P è collegato tramite un'asta di lunghezza $\ell = 1$ e massa trascurabile a un punto fisso O. Si scelga un sistema di riferimento in cui il piano verticale sia il piano xy, con la forza di gravità rivolta in verso opposto all'asse y, e il punto O coincida con l'origine. Il punto P è inoltre collegato tramite due molle di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile ai centri di massa di due dischi omogenei D_1 e D_2, entrambi di massa M e raggio $r = 1$, che rotolano senza strisciare nel piano xy lungo le guide orizzontali poste alle quote $y = 2$ e $y = 0$ rispettivamente (si veda la figura 1).

- Scrivere la lagrangiana del sistema. Come coordinate lagrangiane si possono utilizzare l'angolo φ che P forma con l'asse y discendente e le ascisse x_1 e x_2 dei centri di massa dei dischi. Le variabili x_1, x_2, e φ sono rappresentate nella figura che segue.
- Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange.
- Determinare le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità, limitandosi al caso in cui la matrice hessiana dell'energia potenziale sia non singolare.

Nella figura che segue sono stati chiamati C_1 e C_2 rispettivamente i centri di massa di D_1 e D_2. Inoltre, abbiamo chiamato A e B il punto di contatto rispettivamente di D_1 e D_2.



Premessa. Con abuso di notazione, facciamo presente al lettore, che durante lo svolgimento sostituiremo $r = 1$ e $\ell = 1$ nelle formule che determineremo dai calcoli che faremo in seguito, senza soffermarci sull'analisi dimensionale di tali formule. La scelta di quanto detto è stata preso al solo scopo di semplificare i calcoli. A rigore, andrebbe sostituito $\ell = 1\,\mathrm{m}$ e $r = 1\,\mathrm{m}$, non $r = 1$ e $\ell = 1$, stando molto attenti alle unità di misura delle formule ottenuto. Uno dei principali "metodi" per verificare che una formula trovata è corretta è fare l'analisi dimensionale, e in questo caso questa "verifica" durante lo svolgimento non potrà essere fatta.

Svolgimento. Come suggerisce il testo scegliamo come variabili lagrangiane x_1, x_2 e φ. L'energia potenziale è

$$U = -mg\ell\cos\varphi + Mgr + Mg(r+2) + \frac{1}{2}k\overline{PC_2}^2 + \frac{1}{2}k\overline{PC_1}^2 + \text{costante}, \tag{1}$$

dove $P = (\ell\sin\varphi, -\ell\cos\varphi)$, $C_1 = (x_1, r+2)$ e $C_2 = (x_2, r)$.
Si ha

$$\begin{aligned}\overline{PC_1}^2 &= (\ell\sin\varphi - x_1)^2 + (\ell\cos\varphi + r)^2 = \\ &= \ell^2 + x_1^2 - 2\ell\sin\varphi x_1 + r^2 + 2\ell r\cos\varphi\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\overline{PC_2}^2 &= (\ell\sin\varphi - x_2)^2 + (\ell\cos\varphi + r + 2)^2 = \\ &= \ell^2 + x_2^2 - 2\ell\sin\varphi x_2 + (r+2)^2 + 2\ell(r+2)\cos\varphi.\end{aligned}$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
U(x_1,x_2,\varphi) &= -mg\ell\cos\varphi + \frac{1}{2}k(x_1^2 - 2\ell x_1\sin\varphi + 2\ell r\cos\varphi) + \frac{1}{2}k\left(x_2^2 - 2\ell x_2\sin\varphi + 2(r+2)\ell\cos\varphi\right) + \text{costante} = \\
&= -mg\ell\cos\varphi + \frac{1}{2}k\left(x_1^2 + x_2^2 - 2\ell\sin\varphi(x_1+x_2) + 4\ell\cos\varphi(r+1)\right) + \text{costante}.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Si osservi che i termini costanti sono stati "incorporati" nella costante.
L'energia cinetica è

$$
T = \frac{1}{2}I_A\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_B\dot{\gamma}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}_P^2, \tag{3}
$$

dove I_A è il momento d'inerzia del disco D_1 rispetto al polo $A=(x_1,2)$ e I_B è il momento d'inerzia del disco D_2 rispetto al polo $B=(x_2,0)$, $\dot{\theta}$ è la velocità angolare del disco D_1, e $\dot{\gamma}$ è la velocità angolare del disco D_2. La velocità dei centri di massa di D_1 e D_2 sono rispettivamente

$$
\boldsymbol{r}_{\mathrm{CM},1} = (\dot{x}_1, 0) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{r}_{\mathrm{CM},2} = (\dot{x}_2, 0).
$$

Sappiamo che il disco D_1 e D_2 si muovono di puro rotolamento, pertanto vale

$$
\dot{x}_1 = \dot{\theta}r \quad \text{e} \quad \dot{x}_2 = \dot{\gamma}r.
$$

La velocità di P è

$$
\boldsymbol{r}_P = (\ell\dot{\varphi}\,\cos\varphi, \ell\dot{\phi}\sin\varphi),
$$

da cui

$$
|\boldsymbol{r}_P| = \ell\dot{\varphi}.
$$

Avvalendosi di quanto ottenuto, possiamo riscrivere l'energia cinetica come segue

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}Mr^2\right)\left(\frac{\dot{x}_2}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}Mr^2\right)\left(\frac{\dot{x}_1}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 = \\
&= \frac{3}{4}M\dot{x}_2^2 + \frac{3}{4}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2.
\end{aligned}
$$

Dunque, la lagrangiana è

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}(x_1,x_2,\varphi,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{\varphi}) = T(\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{\varphi}) - U(x_1,x_2,\varphi) = \\
&= \frac{3}{4}M(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2) + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + mg\ell\cos\varphi - \frac{1}{2}k\left(x_1^2+x_2^2 - 2\ell\sin\varphi(x_1+x_2) + 4\ell\cos\varphi(r+1)\right) + \text{costante}.
\end{aligned}
$$

cioè

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}(x_1,x_2,\varphi,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{\varphi}) = \\
&= \frac{3}{4}M(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2) + \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi - \frac{1}{2}k\left(x_1^2+x_2^2 - 2\sin\varphi(x_1+x_2) + 8\cos\varphi\right) + \text{costante}.
\end{aligned}
$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti sono

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_1}\right) = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} \\[2ex]
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_2}\right) = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2} \\[2ex]
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi},
\end{cases}
$$

da cui

$$\begin{cases} \frac{3}{2}M\ddot{x}_1 = -kx_1 + k\sin\varphi \\ \\ \frac{3}{2}M\ddot{x}_2 = -kx_2 + k\sin\varphi \\ \\ m\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi + k\cos\varphi(x_1+x_2) + 4k\sin\varphi. \end{cases}$$

Per tutto lo studio dei punti di equilibrio del sistema sostituiremo $\ell = 1$ e $r = 1$. Determiniamo i punti di equilibrio e ne discutiamo la loro natura. Per lo studio dei punti di equilibrio prendiamo $\varphi \in [0, 2\pi)$. Calcoliamo il gradiente del potenziale U. Si ha

$$\begin{aligned} \nabla U &= \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial \varphi}\right) = \\ &= \left(kx_1 - k\sin\varphi, kx_2 - k\sin\varphi, mg\sin\varphi + \frac{1}{2}k\left(-2\cos\varphi(x_1+x_2) - 8\sin\varphi\right)\right). \end{aligned}$$

Dunque, ponendo il gradiente uguale a zero, si ottiene

$$\begin{cases} kx_1 - k\sin\varphi = 0 \\ \\ kx_2 - k\sin\varphi = 0 \\ \\ mg\sin\varphi - k\cos\varphi(x_1+x_2) - 4k\sin\varphi = 0, \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x_1 = \sin\varphi \\ x_2 = \sin\varphi \\ mg\sin\varphi - k\cos\varphi(2\sin\varphi) - 4k\sin\varphi = 0, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_1 = \sin\varphi \\ x_2 = \sin\varphi \\ \sin\varphi(mg - 2k\cos\varphi - 4k) = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni "banali" del sistema sono

$$A = (x_1, x_2, \varphi) = (0,0,0) \quad \text{e} \quad B = (x_1, x_2, \varphi) = (0, 0, \pi).$$

Dall'ultima equazione del sistema, si ha

$$2k\cos\varphi = -4k + mg,$$

o anche

$$\cos\varphi = \frac{mg}{2k} - \frac{4k}{2k} = \frac{mg}{2k} - 2 = 2\left(\frac{mg}{4k} - 1\right) = \underbrace{\frac{mg}{2k}}_{:=\beta} - 2 = \beta - 2.$$

Ricordando che l'immagine del coseno è $[-1, 1]$, deduciamo che se $\beta \in (1, 3)$ il sistema è compatibile, mentre se $\beta < 1 \vee \beta > 3$ è impossibile. Se $\beta = 3$ viene $\cos\varphi = 0$, che ha come soluzioni

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad \varphi_2 = \frac{3}{2}\pi.$$

Dunque, se $1 \leq \beta \leq 3$ abbiamo

$$\varphi_{1,2} = \pm\arccos(\beta - 2).$$

Calcoliamo la matrice Hessiana per U, cioè

$$H(x_1, x_2, \varphi) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial \varphi} \\ \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial \varphi} \\ \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = kx_1 - k \sin \varphi;$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = kx_2 - k \sin \varphi;$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = mg \sin \varphi - k \cos \varphi (x_1 + x_2) - 4k \sin \varphi.$$

da cui

$$\frac{\partial U^2}{\partial x_1^2} = k; \qquad \frac{\partial U^2}{\partial x_2^2} = k; \qquad \frac{\partial U^2}{\partial \varphi^2} = mg \cos \varphi + k \sin \varphi (x_1 + x_2) - 4k \cos \varphi;$$

$$\frac{\partial U^2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0; \qquad \frac{\partial U^2}{\partial x_2 \partial x_1} = 0; \qquad \frac{\partial U^2}{\partial x_1 \partial \varphi} = -k \cos \varphi;$$

$$\frac{\partial U^2}{\partial x_2 \partial \varphi} = -k \cos \varphi; \qquad \frac{\partial U^2}{\partial \varphi \partial x_1} = -k \cos \varphi; \qquad \frac{\partial U^2}{\partial \varphi \partial x_2} = -k \cos \varphi.$$

Dunque la matrice Hessiana è

$$H(x_1, x_2, \varphi) = \begin{pmatrix} k & 0 & -k \cos \varphi \\ 0 & k & -k \cos \varphi \\ -k \cos \varphi & -k \cos \varphi & mg \cos \varphi + k \sin \varphi (x_1 + x_2) - 4k \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo che

$$\beta = \frac{mg}{2k},$$

si ottiene

$$mg\ell \cos \varphi + k \sin \varphi (x_1 + x_2) - 4k \cos \varphi =$$

$$= \cos \varphi \, (mg - 4k) + k \sin \varphi \, (x_1 + x_2) =$$

$$= 2k \cos \varphi (\beta - 2) + k \sin \varphi (x_1 + x_2),$$

quindi

$$H(x_1, x_2, \varphi) = \begin{pmatrix} k & 0 & -k \cos \varphi \\ 0 & k & -k \cos \varphi \\ -k \cos \varphi & -k \cos \varphi & 2k\ell \cos \varphi (\beta - 2) + k \sin \varphi (x_1 + x_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} k & 0 & -k \cos \varphi \\ 0 & k & -k \cos \varphi \\ -k \cos \varphi & -k \cos \varphi & 2k \cos \varphi (\beta - 2) + k \sin \varphi (x_1 + x_2) \end{pmatrix}.$$

Valutiamo

$$H(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} k & 0 & -k \\ 0 & k & -k \\ -k & -k & 2k(\beta - 2) \end{pmatrix}$$

e

$$H(0,0,\pi) = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k & k \\ k & k & -2k(\beta-2) \end{pmatrix}.$$

Avvalendosi del criterio di Sylvester[1] è possibile determinare la natura dei punti trovati.
Studiamo la natura del punto $(0,0,0)$. I minori di testa della matrice Hessiana sono

$$\det k = k > 0,$$

poi

$$\det \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = k^2 > 0,$$

ed infine

$$\det \begin{pmatrix} k & 0 & -k \\ 0 & k & -k \\ -k & -k & 2k(\beta-2) \end{pmatrix} = k \det \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & 2k(\beta-2) \end{pmatrix} - k \det \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & -k \end{pmatrix} =$$

$$= k(2k^2(\beta-2) - k^2) - k\,k^2 = 2k^3(\beta-3).$$

Se $B > 3$ la matrice $H(0,0,0)$ è definitiva positiva e pertanto $(0,0,0)$ è un minimo, cioè un punto di equilibrio stabile. Se $B = 3$ la matrice è singolare e questo caso non è da studiare. Se $B < 3$ il punto $(0,0,0)$ è di sella, cioè un punto di equilibrio instabile.

Studiamo la natura del punto $(0,0,\pi)$. Calcoliamo

$$\det k > 0,$$

poi

$$\det \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = k^2 > 0,$$

ed infine

$$\det \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k & k \\ k & k & -2k(\beta-2) \end{pmatrix} = k \det \begin{pmatrix} k & -k \\ k & -2k(\beta-2) \end{pmatrix} + k \det \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & k \end{pmatrix} =$$

$$= k(-2k^2(\beta-2) - k^2) + k\,(-k^2) =$$

$$= -2k^3(\beta+3).$$

Se $\beta < -3$ la matrice $H(0,0,\pi)$ è definita positiva, pertanto $(0,0,\pi)$ è un punto di minimo, cioè un punto di equilibrio stabile. Se $\beta = -3$ la matrice è singolare e questo caso non è richiesto. Se $B > -3$ la matrice $H(0,0,\pi)$ è indefinita, pertanto il punto $(0,0,\pi)$ è una sella, ovvero un punto di equilibrio instabile.

Non ci rimane che studiare la natura dei seguenti punti di equilibrio

$$\begin{cases} 1 \le \beta \le 3 \\ \varphi = \pm \arccos(\beta-2) \\ x_1 = \sin\varphi \\ x_2 = \sin\varphi, \end{cases}$$

in altri termini

$$S_{+,-} := \left(\underbrace{\pm \arccos(\beta-2)}_{\varphi}, \sin\varphi, \sin\varphi \right).$$

[1]Sia A una matrice $n \times n$ simmetrica. Siano $\{\lambda_i\}$ gli autovalori reali di A, allora abbiamo

$$\lambda_i > 0, \forall\, i \quad \Leftrightarrow \quad \det A_i > 0,\ \forall\, i$$

dove A_i è il minore di testa di ordine i, oppure

$$\lambda_i < 0, \forall\, i \quad \Leftrightarrow \quad \det A_i = (-1)^i.$$

Si ha

$$\det S_+ = \begin{pmatrix} k & 0 & -k(\beta-2) \\ 0 & k & -k(\beta-2) \\ -k(\beta-2) & -k\left(\beta-2\right) & k\left(2(\beta-2)^2+2\sin^2\varphi\right)\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} k & 0 & -k(\beta-2) \\ 0 & k & -k(\beta-2) \\ -k(\beta-2) & -k(\beta-2) & k\left(2(\beta-2)^2+2\left(1-\cos^2\varphi\right)\right)\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} k & 0 & -k(\beta-2) \\ 0 & k & -k(\beta-2) \\ -k(\beta-2) & -k(\beta-2) & 2k((\beta-2)^2+1-(\beta-2)^2)\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} k & 0 & -k(\beta-2) \\ 0 & k & -k(\beta-2) \\ -k(\beta-2) & -k(\beta-2) & 2k\end{pmatrix} =$$

$$= k\det\begin{pmatrix} k & -k(\beta-2) \\ -k(\beta-2) & 2k\end{pmatrix} - k(\beta-2)\begin{pmatrix} 0 & k \\ -k(\beta-2) & -k(\beta-2)\end{pmatrix} =$$

$$= k(2k^2-k^2(\beta-2)^2) - k(\beta-2)k^2(\beta-2) =$$

$$= 2k^3(1-(\beta-2)^2) =$$

$$= -2k^3(\beta-1)(\beta-3) > 0,$$

perché $1 < \beta < 3$. Quanto ottenuto ci fa concludere che il punto S_+ è un punto di minimo per $1 < \beta < 3$ e pertanto è un punto di equilibrio stabile. Per $\beta = 1$ o $\beta = 3$ la matrice è singolare e questo caso non è richiesto. Si dimostra che $detS_+ = detS_-$, quindi per $1 < \beta < 3$ il punto S_- è un punto di minimo, ovvero un punto di equilibrio stabile. Anche in questo caso per $\beta = 1$ o $\beta = 3$ la matrice è singolare e questo caso non è richiesto. lo studio della natura del punto S_- richiede un supplemento di indagine.

□

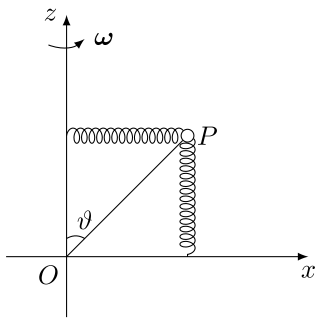
Meccanica razionale – Lagrangiana #14

Esercizio 14 (★★★☆☆). Un'asta di lunghezza ℓ e massa trascurabile è attaccata all'origine di un sistema di riferimento verticale e può ruotare attorno all'origine. All'altra estremità dell'asta è appeso un punto P di massa m, il quale è collegato agli assi orizzontale e verticale tramite due molle di costanti elastiche $k_1 > 0$ e $k_2 > 0$. Le due molle si mantengono parallele agli assi z ed x rispettivamente.
Tutto il sistema ruota con velocità anagolare costante $\boldsymbol{\omega}$ attorno alla verticale.
Indicato con ϑ l'angolo che l'asta forma con la verticale:

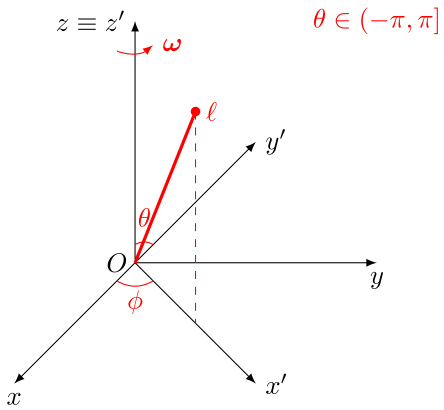
1) determinare l'equazione del moto;

2) calcolare le posizioni di equilibrio relative e discuterne la stabilità;

3) dimostrare che si conserva l'energia meccanica totale.



Svolgimento. Scegliamo due sistemi di riferimento $Oxyz$ e $O'x'y'z'$. Il sistema $Oxyz$ è fisso, mentre il sistema $O'x'y'z'$ è non inerziale; l'asse $z \equiv z'$. Il sistema di riferimento $O'x'y'z'$ ruota con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}$ ed inoltre l'asta si trova istante per istante nel piano $x'y'$.



Il punto P rispetto al sistema fisso ha coordinate

$$P = (\ell \sin\theta \cos\phi, \ell \sin\theta \sin\phi, \ell \cos\theta) = \ell \left(\sin\theta \cos(\omega t), \sin\theta \sin(\omega t), \cos\theta\right). \tag{1}$$

La velocità di P è:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_P = \ell \left(\dot{\theta} \cos\theta \cos(\omega t) - \omega \sin\theta \sin(\omega t), \dot{\theta} \cos\theta \sin(\omega t) + \omega \sin(\theta) \cos(\omega t), -\dot{\theta} \sin\theta\right). \tag{2}$$

Il modulo quadro della velocità di P è

$$
\begin{align}
|\dot{\boldsymbol{r}}_P|^2 &= \ell^2 \left(\left(\dot{\theta} \cos\theta \cos(\omega t) - \omega \sin\theta \sin(\omega t) \right)^2 + \left(\dot{\theta} \cos\theta \sin(\omega t) + \omega \sin(\theta) \cos(\omega t) \right)^2 + \dot{\theta}^2 \sin^2\theta \right) = \tag{3}\\
&= \ell^2 \left(\dot{\theta}^2 \cos^2\theta \cos^2(\omega t) + \omega^2 \sin^2\theta \sin^2(\omega t) \cancel{- 2\dot{\theta}^2 \cos\theta \cos(\omega t) \omega \sin\theta \sin(\omega t)} + \dot{\theta}^2 \cos^2\theta \sin^2(\omega t) \right) + \tag{4}\\
&\quad + \ell^2 \left(\omega^2 \sin^2\theta \cos^2(\omega t) \cancel{+ 2\dot{\theta}\omega \cos\theta \sin(\omega t) \sin\theta \cos(\omega t)} + \dot{\theta}^2 \sin^2\theta \right) = \tag{5}\\
&= \ell^2 \left(\dot{\theta}^2 \cos^2\theta + \omega^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2 \sin^2(\theta) \right) = \tag{6}\\
&= \ell^2 \left(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta \right). \tag{7}
\end{align}
$$

L'energia cinetica e l'energia potenziale sono rispettivamente

$$T = \frac{1}{2} m |\dot{\boldsymbol{r}}_P|^2 = \frac{1}{2} m\ell^2 \left(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta \right) \tag{8}$$

e

$$U = mg\ell \cos\theta + \frac{1}{2} k_1 \ell^2 \cos^2\theta + \frac{1}{2} k_2 \ell^2 \sin^2\theta + \text{costante}. \tag{9}$$

La lagrangiana è

$$
\begin{align}
\mathcal{L} &= T - U = \tag{10}\\
&= \frac{1}{2} m\ell^2 \left(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta \right) - mg\ell\cos\theta - \frac{1}{2} k_2 \ell^2 \sin^2\theta - \frac{1}{2} k_1 \ell^2 \cos^2\theta + \text{costante}. \tag{11}
\end{align}
$$

L'equazione di Eulero-Lagrange è

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta},$$

da cui

$$m\ell^2 \ddot{\theta} = \frac{1}{2} m\ell^2 \omega^2 \sin(2\theta) + mg\ell \sin\theta - \frac{1}{2} k_2 \ell^2 \sin(2\theta) + \frac{1}{2} k_1 \ell^2 \sin(2\theta), \tag{12}$$

cioè

$$\boxed{m\ell^2 \ddot{\theta} = \frac{1}{2} \ell^2 \sin(2\theta) \left(m\omega^2 - k_2 + k_1 \right) + mg\ell \sin\theta.}$$

Per lo studio dei punti di equilibrio prendiamo $\theta \in (-\pi, \pi]$. Per determinare le posizione di equilibrio si può imporre

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m\ell^2 \left(2\omega^2 \sin\theta \cos\theta \right) + mg\ell \sin\theta - \frac{1}{2} k_2 \ell^2 (2 \sin\theta \cos\theta) + \frac{1}{2} k_1 \ell^2 (2 \sin\theta \cos\theta) = 0, \tag{13}$$

da cui

$$\sin\theta \left(m\ell\omega^2 \cos\theta + mg - k_2 \ell \cos\theta + k_1 \ell \cos\theta \right) = 0, \tag{14}$$

conseguentemente

$$\sin\theta = 0 \tag{15}$$

e

$$m\ell\omega^2 \cos\theta + mg - k_2 \ell \cos\theta + k_1 \ell \cos\theta = 0. \tag{16}$$

L'equazione (15) ha soluzioni

$$\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = 0 \quad \vee \quad \theta_1 = \pi; \tag{17}$$

mentre l'equazione (16) si può riscrivere come

$$\cos\theta = \frac{mg}{\ell \left(k_2 - k_1 - m\omega^2 \right)} =: \frac{1}{\alpha}, \tag{18}$$

da cui

$$\theta_3 = \arccos\left(\frac{1}{\alpha} \right) \quad \vee \quad \theta_4 = -\arccos\left(\frac{1}{\alpha} \right). \tag{19}$$

Il lettore attento avrà notato che rispetto agli altri esercizi non abbiamo posto $\dfrac{\partial U}{\partial \theta} = 0$, ma $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$; inoltre, si osservi che $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \neq \dfrac{\partial U}{\partial \theta}$.

Dal punto di vista matematico la spiegazione può essere trovata in un qualsiasi testo di meccanica razionale. Daremo una spiegazione dal punto di vista fisico.
L'energia di un sistema meccanico dipende dal sistema di riferimento scelto, è ovvio che dal sistema di riferimento fisso per P non esiste nessun punto di equilibrio, perchè dal sistema fisso l'osservatore vede ruotare P con velocità angolare costante. Pertanto scegliendo come sistema di riferimento il sistema $O'x'y'z'$ l'asta rimarrà nel piano $x'y'$ per via dei vincoli imposti dal problema e in tale sistema esistono dei punti di equilibrio. Nel sistema di riferimento $O'x'y'z'$ il punto P oltre essere soggetto alla forza peso e alle due forze delle molle, è soggetto alla forza centrifuga, cioè

$$\boldsymbol{F}_{\text{centrifuga}} = -m\,\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}') = -m\boldsymbol{\omega} \wedge (\omega\,\hat{\boldsymbol{z}} \wedge (x'\,\hat{\boldsymbol{x}}' + z\,\hat{\boldsymbol{z}}')) = \tag{20}$$

$$= -m\omega\,\hat{\boldsymbol{z}} \wedge (\omega x'\,\hat{\boldsymbol{y}}') = m\omega^2 x'\,\hat{\boldsymbol{x}}', \tag{21}$$

dove $\boldsymbol{r}'$ è la distanza di P rispetto all'origine O, mentre $\hat{\boldsymbol{x}}'$, $\hat{\boldsymbol{y}}'$ e $\hat{\boldsymbol{z}}'$ sono rispettivamente i versori dell'asse x', y' e z'. La forza centrifuga dipende dalla sola posizione, pertanto è conservativa. Determiniamo il potenziale $U_{\text{centrifugo}}$. Imponiamo

$$m\omega^2 x' = -\frac{dU_{\text{cen}}}{dx'} \quad \Rightarrow \quad U_{\text{cen}} = -m\omega^2\frac{(x')^2}{2} + \text{costante}. \tag{22}$$

Nel nostro caso $x' = \ell\sin\theta$ e quindi

$$U_{\text{cen}} = -\frac{m\omega^2\ell^2}{2}\sin^2\theta + c \tag{23}$$

Il potenziale nel sistema di riferimento non inerziale è

$$U' = mg\ell\cos\theta + \frac{1}{2}k_2\ell^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}k_1\ell^2\cos^2\theta - \frac{m\omega^2\ell^2}{2}\sin^2\theta + \text{costante}. \tag{24}$$

Osserviamo che

$$\frac{dU'}{d\theta} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}, \tag{25}$$

infatti derivando la lagrangiana si ottiene la derivata del potenziale nel sistema di riferimento dove è possibile determinare le posizioni di equilibrio. Riassumendo i punti di equilibrio sono

- $\theta_0 = 0\,\text{rad};$ (26)
- $\theta_1 = \pi;$ (27)
- $\theta_3 = \arccos\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ (28)
- $\theta_4 = -\arccos\left(\frac{1}{\alpha}\right).$ (29)

Calcoliamo la derivata seconda per U', ovvero

$$\frac{\partial^2 U'}{\partial\theta^2} = -\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2}m\ell^2\omega^2\sin(2\theta) + mg\ell\sin\theta - \frac{1}{2}k_2\ell^2\sin(2\theta) + \frac{1}{2}k_1\ell^2\sin(2\theta)\right) = \tag{30}$$

$$\tag{31}$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2}}m\ell^2\omega^2\left(\cancel{2}\cos(2\theta)\right) - mg\ell\cos\theta + \frac{1}{2}k_2\ell^2\left(2\cos(2\theta)\right) - \frac{1}{2}k_1\ell^2\left(2\cos(2\theta)\right) = \tag{32}$$

$$\tag{33}$$

$$= \cos(2\theta)\left(-m\ell^2\omega^2 + k_2\ell^2 - k_1\ell^2\right) - mg\ell\cos\theta = \tag{34}$$

$$\tag{35}$$

$$= -\ell^2\cos(2\theta)\left(m\omega^2 + k_1 - k_2\right) - mg\ell\cos\theta = \tag{36}$$

$$\tag{37}$$

$$= mg\ell\left(-\ell^2\cos(2\theta)\left(\frac{m\omega^2 + k_1 - k_2}{mg\ell}\right) - \cos\theta\right) = \tag{38}$$

$$\tag{39}$$

$$= mg\ell\left(-\cos(2\theta)\,\ell\left(\frac{m\omega^2 + k_1 - k_2}{mg}\right) - \cos(\theta)\right) = \tag{40}$$

$$\tag{41}$$

$$= mg\ell\left(\alpha\cos(2\theta) - \cos(\theta)\right). \tag{42}$$

Valutiamo
$$\frac{\partial^2 U'}{\partial\theta^2}(0) = mg\ell\,(\alpha - 1)\,,$$
per cui se $\alpha > 1$ allora $\theta = 0$ è un punto di equilibrio stabile, se $\alpha = 1$ non possiamo concludere, se $\alpha < 1$ allora $\theta = 0$ è un punto di equilibrio instabile.

Valutiamo
$$\frac{\partial^2 U'}{\partial\theta^2}(\pi) = mg\,(\alpha + 1)\,,$$
per cui se $\alpha > -1$ allora $\theta = \pi$ è un punto di equilibrio stabile, mentre se $\alpha = -1$ allora non possiamo concludere, se $\alpha < -1$ allora $\theta = \pi$ è un punto di equilibrio instabile. Ora studiamo il punto
$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\alpha}\right). \tag{43}$$
Per la condizione imposta ($\alpha > 0$) e per la condizione di esistenza dell'arcoseno tale punto esiste se e solo se
$$-1 \le \frac{1}{\alpha} \le 1 \tag{44}$$
o anche
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} \ge -1 \\ \\ \dfrac{1}{\alpha} \le 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\alpha+1}{\alpha} \ge 0 \\ \\ \dfrac{\alpha-1}{\alpha} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha \le -1 \quad \vee \quad \alpha > 0 \\ \\ \alpha < 0 \quad \vee \quad \alpha \ge 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |\alpha| \ge 1. \tag{45}$$
Valutiamo
$$\frac{\partial^2 U'}{\partial\theta^2}\left(\arccos\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) = mg\ell\left(\alpha\left(2\cos^2\left(\arccos\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) - 1\right) - \frac{1}{\alpha}\right) = \tag{46}$$
$$\tag{47}$$
$$= mg\ell\left(\frac{2}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} - \alpha\right) = mg\ell\left(\frac{1-\alpha^2}{\alpha}\right). \tag{48}$$
Se
$$\begin{cases} \dfrac{1-\alpha^2}{\alpha} > 0 \\ \\ |\alpha| \ge 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha < -1 \quad \vee \quad 0 < \alpha < 1 \\ |\alpha| \ge 1, \end{cases}$$
allora se $\alpha < -1$ il punto $\theta = \arccos\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ è un punto di equilibrio stabile; se $\alpha = \pm 1$ non possiamo concludere, ed infine se
$$\begin{cases} \dfrac{1-\alpha^2}{\alpha} < 0 \\ \\ |\alpha| \ge 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -1 < \alpha < 0 \quad \vee \quad \alpha > 1 \\ \alpha \le -1 \quad \vee \quad \alpha \ge 1, \end{cases}$$
allora con $\alpha > 1$ il punto $\theta = \arccos\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ è un punto di equilibrio instabile.
Osserviamo che
$$\frac{\partial^2 U'}{\partial\theta^2}\left(-\arccos\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) = mg\ell\left(\alpha\left(\frac{2}{\alpha^2} - 1\right) - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{d^2\tilde{U}}{d\theta^2}\left(\arccos\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) = \tag{49}$$
$$= mg\ell\left(\frac{1-\alpha^2}{\alpha}\right). \tag{50}$$
Pertanto per il punto θ_4 valgono le stesse considerazioni di θ_3, ovvero per $\alpha < -1$ è stabile e per $\alpha > 1$ è instabile. Per $\alpha = 1$ non possiamo concludere. Non ci rimane che studiare i casi per $\alpha = \pm 1$.

Studiamo il punto $\theta = 0$.
Osserviamo che
$$\frac{\partial U'}{\partial \theta}(\theta) = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(0) = 0. \tag{51}$$
Calcoliamo
$$\frac{\partial^3 U'}{\partial \theta^3}(\theta) = mg\ell\left(-2\alpha \sin(2\theta) + \sin\theta\right), \tag{52}$$
da cui, sostituendo $\alpha = 1$ e $\theta = 0$, otteniamo
$$\frac{\partial^3 U'}{\partial \theta^3}(0) = 0. \tag{53}$$
Calcoliamo
$$\frac{\partial^4 U'}{\partial \theta^4}(\theta) = mg\ell\left(-4\alpha \cos(2\theta) + \cos\theta\right), \tag{54}$$
da cui, sostituendo $\alpha = 1$ e $\theta = 0$, otteniamo
$$\frac{\partial^4 U'}{\partial \theta^4}(0) = mg\ell\left(-4 + 1\right) = -3mg\ell < 0. \tag{55}$$
Pertanto il punto $\theta = 0$ è un massimo, ovvero $\theta = 0$ è un punto di equilibrio instabile.
Studiamo il punto $\theta = \pi$
Osserviamo che
$$\frac{\partial U'}{\partial \theta}(\pi) = \frac{\partial^2 U'}{\partial \theta^2}(\pi) = \frac{\partial^3 U'}{\partial \theta^3}(\pi) = 0. \tag{56}$$
Valutiamo
$$\frac{d^4 U'}{d\theta^4}(\pi) = mg\ell(-4 - 1) = -5mg < 0 \tag{57}$$
dove abbiamo sostituito $\alpha = 1$. Concludiamo che $\theta = \pi$ è un punto di equilibrio instabile.
Osserviamo che se sostituiamo $\alpha = \pm 1$ in θ_3, otteniamo
$$\theta_3 = \arccos(\pm 1), \tag{58}$$
che ci da $\theta_3 = 0$ e $\theta_3 = \pi$, già studiati in precedenza. Analogamente, sostituendo $\alpha = \pm 1$ in θ_4, otteniamo:
$$\theta_4 = -\arccos(\pm 1) \tag{59}$$
che ha come soluzioni $\theta_4 = 0$ e $\theta_4 = -\pi$; Il valore $\theta_4 = 0$ lo abbiamo già studiato in precedenza, mentre $\theta_4 = -\pi$ non è accettabile.
Dimostriamo che l'energia totale si conserva nel sistema di riferimento $O'x'y'z'$.
Nel sistema di riferimento $O'x'y'z'$ il punto P ha coordinate
$$P \equiv (x', y', z') = (\ell \sin\theta, 0, \ell\cos\theta), \tag{60}$$
da cui derivando ogni componente otteniamo la velocità
$$\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{P}} = \left(\ell\dot\theta\cos\theta, 0, -\ell\dot\theta\sin\theta\right). \tag{61}$$
Il modulo quadro della velocità è
$$\left|\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{P}}\right|^2 = \ell|\dot\theta|. \tag{62}$$
L'energia cinetica di P è
$$T'(\dot\theta) = \frac{1}{2}m\dot\theta^2\ell^2. \tag{63}$$
L'energia totale è
$$E' = T' + U' = \frac{1}{2}m\dot\theta^2\ell^2 + mg\ell\cos\theta + \frac{1}{2}k_2\ell^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}k_1\ell^2\cos^2\theta - \frac{m\omega^2\ell^2}{2}\sin^2\theta + \text{costante}. \tag{64}$$
Calcoliamo
$$\frac{dE'}{dt} = \dot\theta\left(m\ddot\theta\ell^2 - mg\ell\sin\theta + \frac{1}{2}k_2\ell^2\sin(2\theta) - \frac{1}{2}k_1\ell^2\sin(2\theta) - \frac{m\omega^2\ell^2}{2}\sin(2\theta)\right). \tag{65}$$

Per l'equazione di Eulero-Lagrange si ha

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\sin(2\theta)\,\omega^2 - \frac{k_2}{2m}\sin(2\theta) + \frac{k_1}{2m}\sin(2\theta) + \frac{g\sin\theta}{\ell}, \tag{66}$$

che sostituito in $\dfrac{dE'}{dt}$ da

$$\frac{dE'}{dt} = \dot{\theta}\left(\cancel{\frac{1}{2}m\omega^2}\ell^2\sin(2\theta) - \cancel{\frac{k_2\ell^2}{2}\sin(2\theta)} + \cancel{\frac{k_1}{2}\ell^2\sin(2\theta)} + \cancel{mg\ell\sin\theta} - \cancel{mg\ell\sin\theta} + \cancel{\frac{1}{2}k_2\ell^2\sin(2\theta)}\right) + \tag{67}$$

$$+\,\dot{\theta}\left(-\frac{1}{2}k_1\ell^2\cancel{\sin(2\theta)} - \cancel{\frac{m\omega^2\ell^2}{2}\sin(2\theta)}\right) = 0, \tag{68}$$

abbiamo dunque dimostrato che

$$\frac{dE'}{dt} = 0, \tag{69}$$

da cui

$$E' = \text{costante}, \tag{70}$$

pertanto il sistema è conservativo. □

Meccanica razionale – Lagrangiana #16

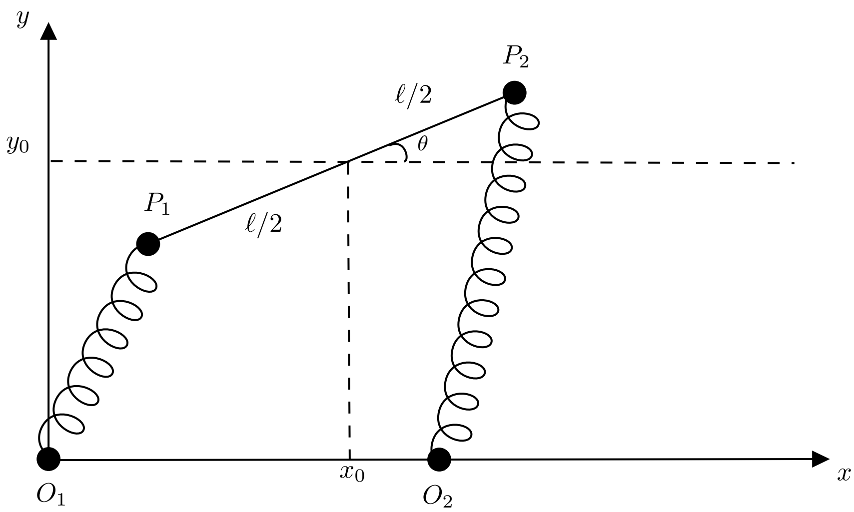
Esercizio 16 (★★★☆☆). Un sistema meccanico è costituito da 2 punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa m, disposti agli estremi di un'asta di lunghezza ℓ e massa trascurabile. I due punti sono vincolati a muoversi in un piano verticale. Inoltre due molle, di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile, collegano P_1 a O_1 e P_2 a O_2, dove O_1 e O_2 sono due punti fissi posti alla stessa quota e distanti d l'uno dall'altro, come mostrato in figura. Si indichi con g l'accelerazione di gravità.

1) Scrivere la lagrangiana del sistema. Può essere conveniente scegliere un sistema di coordinate (x, y) in cui O_1 e O_2 sono posti lungo l'asse x e utilizzare come coordinate lagrangiane le coordinate cartesiane (x_0, y_0) del centro di massa C del sistema e l'angolo θ che l'asta forma rispetto all'asse x.

2) Scrivere le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.

3) Determinare le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

Si assuma che O_1, O_2, P_1 e P_2 siano vincolati a rimanere sullo stesso piano.



Svolgimento. Punto 1. Scegliamo un sistema di riferimento fisso Oxy e come variabili lagrangiane le coordinate del centro di massa del sistema (x_0, y_0) e l'angolo θ che l'asta forma con l'orizzontale. Siano

$$P_1 = (x_{P_1}, y_{P_1})$$

e

$$P_2 = (x_{P_2}, y_{P_2}),$$

allora vale

$$\begin{cases} x_{P_1} + x_{P_2} = 2x_0 \\ y_{P_1} + y_{P_2} = 2y_0 \end{cases}$$

e quindi è possibile riscrivere

$$P_2 \equiv (2x_0 - x_{P_1}, 2y_0 - y_{P_1}).$$

Dalla geometria del problema si ha

$$\begin{cases} x_{P_1} = x_0 - \dfrac{\ell}{2}\cos\theta \\ \\ y_{P_1} = y_0 - \dfrac{\ell}{2}\sin\theta, \end{cases}$$

da cui

$$P_1 = \left(x_0 - \frac{\ell}{2}\cos\theta, y_0 - \frac{\ell}{2}\sin\theta\right)$$

e

$$P_2 = \left(2x_0 - x_0 + \frac{\ell}{2}\cos\theta, 2y_0 - y_0 + \frac{\ell}{2}\sin\theta\right) = \left(x_0 + \frac{\ell}{2}\cos\theta, y_0 + \frac{\ell}{2}\sin\theta\right).$$

Le velocità di P_1 e P_2 sono rispettivamente

$$\dot{\mathbf{r}}_{P_1} = \left(\dot{x}_0 + \frac{\dot{\theta}\ell}{2}\sin\theta, \dot{y}_0 - \frac{\dot{\theta}\ell}{2}\cos\theta\right)$$

e

$$\dot{\mathbf{r}}_{P_2} = \left(\dot{x}_0 - \frac{\dot{\theta}\ell}{2}\sin\theta, \dot{y}_0 + \frac{\dot{\theta}\ell}{2}\cos\theta\right).$$

Calcoliamo i moduli quadri delle velocità di P_1 e P_2, che sono rispettivamente

$$|\dot{\mathbf{r}}_{P_1}|^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \frac{\ell^2}{4}\,\dot{\theta}^2 + \dot{x}_0\,\dot{\theta}\,\ell\,\sin\theta - \dot{y}_0\dot{\theta}\ell\cos\theta \tag{1}$$

e

$$|\dot{\mathbf{r}}_{P_2}|^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 - \dot{x}_0\dot{\theta}\ell\sin\theta + \dot{y}_0\dot{\theta}\ell\cos\theta + \frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}^2. \tag{2}$$

L'energia cinetica del sistema è

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\,|\dot{\mathbf{r}}_{P_1}|^2 + \frac{1}{2}m\,|\dot{\mathbf{r}}_{P_2}|^2 = \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \frac{\ell^2}{4}\,\dot{\theta}^2 + \dot{x}_0\,\dot{\theta}\,\ell\,\sin\theta - \dot{y}_0\dot{\theta}\ell\cos\theta\right) + \\ &+ \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 - \dot{x}_0\dot{\theta}\ell\sin\theta + \dot{y}_0\dot{\theta}\ell\cos\theta + \frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}^2\right) = \\ &= m(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{\ell^2}{4}\,m\,\dot{\theta}^2. \end{aligned}$$

L'energia potenziale del sistema è

$$U(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{\theta}) = mgy_{P_1} + mgy_{P_2} + \frac{1}{2}k(\overline{O_1P_1}^2 + \overline{O_2P_2}^2) + \text{costante}, \tag{3}$$

dove $\overline{O_1P_1}$ e $\overline{O_2P_2}$ sono le lunghezze delle molle, da cui

$$\begin{aligned} U &= m_g y_{P_1} + mgy_{P_2} + \frac{1}{2}k(\overline{O_1P_1}^2 + \overline{O_2P_2}^2) + \text{costante} = \\ &= mg\left(y_0 - \frac{\ell}{2}\sin\theta\right) + mg\left(y_0 + \frac{\ell}{2}\sin\theta\right) + \\ &+ \frac{1}{2}k\left(\left(x_0 - \frac{\ell}{2}\cos\theta\right)^2 + \left(y_0 - \frac{\ell}{2}\sin\theta\right)^2 + \left(x_0 + \frac{\ell}{2}\cos\theta - d\right)^2 + \left(y_0 + \frac{\ell}{2}\sin\theta\right)^2\right) + \text{costante} = \\ &= 2mgy_0 + \frac{1}{2}k\left(2x_0^2 + 2y_0^2 + \frac{\ell^2}{2} - 2x_0 d - \ell d\cos\theta\right) + \text{costante}. \end{aligned}$$

La lagrangiana del sistema è

$$\mathcal{L} = T(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{\theta}) - U(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{\theta}) = \tag{4}$$

$$= m(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{\ell^2}{4}\,m\,\dot{\theta}^2 - 2mgy_0 - k(x_0^2 + y_0^2) + \frac{k}{2}(2x_0 d + \ell d\cos\theta) + \text{costamte}. \tag{5}$$

Si conclude che la lagrangiana è

$$\mathcal{L}(x_0, y_0, \theta, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{\theta}) = m(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{\ell^2}{4}\,m\,\dot{\theta}^2 - 2mgy_0 - k(x_0^2 + y_0^2) + \frac{k}{2}(2x_0 d + \ell d\cos\theta) + \text{costante}.$$

Punto 2. Determiniamo le equazioni di Eulero-Lagrange. Si ha

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_0}\right) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_0} \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_0}\right) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_0} \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}. \end{cases} \tag{6}$$

Calcoliamo separatamente i vari termini del sistema, cioè

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_0}\right) = 2m\ddot{x}_0; \\ &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_0} = -2kx_0 + kd; \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_0}\right) = 2m\ddot{y}_0; \\ &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_0} = -2mg - 2ky_0; \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\ell^2}{2}\, m\, \ddot{\theta}; \\ &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{k}{2}\,\ell\, d\, \sin\theta. \end{aligned}$$

Si conclude che le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\boxed{\begin{cases} 2m\ddot{x}_0 = -2kx_0 + kd \\[2ex] 2m\ddot{y}_0 = -2mg - 2ky_0 \\[2ex] \ell\, m\, \ddot{\theta} = -kd\sin\theta. \end{cases}}$$

Punto 3. Determiniamo le configurazioni di equilibrio del sistema calcolando

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x_0} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial y_0} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}k(4x_0 - 2d) = 0 \\[2ex] 2mg + \dfrac{1}{2}k(4y_0) = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2}k\ell d\sin\theta = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_0 = \dfrac{d}{2} \\[2ex] y_0 = -\dfrac{mg}{k} \\[2ex] \sin\theta = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono

$$(x_0, y_0, \theta) = \left(\frac{d}{2}, -\frac{mg}{k}, 0\right)$$

e

$$(x_0, y_0, \theta) = \left(\frac{d}{2}, -\frac{mg}{k}, \pi\right).$$

Per stabilire la natura dei punti di equilibrio, applichiamo il criterio di Sylvester. Calcoliamo per prima cosa la matrice hessiana:

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_0^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_0 \partial y_0} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_0 \partial \theta} \\ \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial y_0 \partial x_0} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial y_0^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial y_0 \partial \theta} \\ \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial x_0} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial y_0} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k & 0 & 0 \\ \\ 0 & 2k & 0 \\ \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} k\ell d \cos\theta \end{pmatrix}$$

da cui

$$\det H = 2k^3 \ell d \cos\theta.$$

Osserviamo inoltre che i determinanti dei minori di testa sono

$$\det(2k) = 2k > 0,$$
$$\det \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 2k \end{pmatrix} = 4k^2 > 0.$$

Valutiamo

$$\det \left(\frac{d}{2}, -\frac{mg}{k}, 0 \right) = 2k^3 \ell d > 0$$

e

$$\det \left(\frac{d}{2}, -\frac{mg}{k}, \pi \right) = -2k^3 \ell d < 0.$$

deducendone che il punto $\left(\frac{d}{2}, -\frac{mg}{k}, 0 \right)$ è un punto di minimo ovvero un punto di equilibrio stabile, mentre $\left(\frac{d}{2}, -\frac{mg}{k}, \pi \right)$ è un punto di sella, ovvero un punto di equilibrio instabile. □

Meccanica razionale – Lagrangiana #17

Esercizio 17 (★★★☆☆). Un punto materiale P di massa m si muove, sotto l'azione della gravità, lungo una guida elicoidale, descritta dalle equazioni parametriche

$$x = \cos\alpha \qquad y = \sin\alpha \qquad z = \alpha \qquad \alpha \in [0, 10\pi].$$

All'istante iniziale il punto P si trova nel punto più in alto della guida e viene lasciato cadere con velocità iniziale nulla. Sia $\boldsymbol{g}$ l'accelerazione di gravità.

1) Scrivere la lagrangiana del sistema.

2) Scrivere le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.

3) Calcolare il tempo necessario affinché P raggiunga il punto più basso della guida.

4) Determinare la reazione vincolare che agisce sul punto P in funzione della sua posizione.

Svolgimento. Le coordinate del punto P sono

$$P = (\cos\alpha, \sin\alpha, \alpha). \tag{1}$$

La velocità di P è

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{P}} = (-\dot\alpha\ \sin\alpha, \dot\alpha\ \cos\alpha, \dot\alpha), \tag{2}$$

da cui

$$|\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{P}}|^2 = \dot\alpha^2 + \dot\alpha^2 = 2\dot\alpha^2. \tag{3}$$

L'energia cinetica di P è

$$T = \frac{1}{2}m|\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{P}}|^2 = m\dot\alpha^2. \tag{4}$$

L'energia potenziale è

$$U = mg\alpha + \text{costante}. \tag{5}$$

Dunque la lagrangiana è

$$\boxed{\mathcal{L}(\alpha, \dot\alpha) = T - U = m\dot\alpha^2 - mg\alpha + \text{costante}.}$$

L'equazione di Eulero-Lagrange è

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\dot\alpha}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\alpha}, \tag{6}$$

cioè

$$2m\ddot\alpha = -mg, \tag{7}$$

ovvero

$$\boxed{\ddot\alpha = -\frac{g}{2}.}$$

Abbiamo dunque

$$\dot\alpha = -\frac{g}{2}t + k, \tag{8}$$

con k costante. Dal momento che $\dot\alpha(0) = 0$ allora $k = 0$. Inoltre, troviamo

$$\alpha = -\frac{g}{4}t^2 + \tilde{k} \tag{9}$$

con $\tilde{k}$ costante. Dalla condizione $\alpha(0) = 10\pi = \tilde{k}$ allora

$$\alpha = -\frac{g}{4}t^2 + 10\pi. \tag{10}$$

Dalla condizione

$$\alpha(\tilde{t}) = 0, \tag{11}$$

si ottiene

$$\tilde{t} = \sqrt{\frac{40\pi}{g}}.$$

Per la seconda legge della dinamica abbiamo

$$\begin{cases} N_x = m\ddot{x} \\ N_y = m\ddot{y} \\ N_z = m\ddot{z} + mg, \end{cases} \tag{12}$$

dove N_x, N_y e N_z sono rispettivamente la componente lungo l'asse delle x della reazione vincolare, la componente lungo l'asse delle y della reazione vincolare, la componente lungo l'asse delle z della reazione vincolare.
Sapendo che

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{P}} = (-\dot{\alpha}\ \sin\alpha, \dot{\alpha}\ \cos\alpha, \dot{\alpha}), \tag{13}$$

otteniamo

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{P}} = (-\ddot{\alpha}\ \sin\alpha - \dot{\alpha}^2\cos\alpha, \ddot{\alpha}\ \cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha, \ddot{\alpha}), \tag{14}$$

e sostituendo nel sistema abbiamo

$$\begin{cases} N_x = m\left(-\ddot{\alpha}\ \sin\alpha - \dot{\alpha}^2\cos\alpha\right) \\ N_y = m\left(\ddot{\alpha}\ \cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha\right) \\ N_z = m\ddot{\alpha} + mg. \end{cases} \tag{15}$$

Sfruttando quanto ottenuto abbiamo

$$\begin{cases} N_x = -m\left(\ddot{\alpha}\ \sin\alpha + \dot{\alpha}^2\cos\alpha\right) \\ \\ N_y = m\left(\ddot{\alpha}\ \cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha\right) \\ \\ N_z = m\ddot{\alpha} + mg \\ \\ \ddot{\alpha} = -\dfrac{g}{2} \\ \\ \dot{\alpha} = -\dfrac{g}{2}t \\ \\ t = \sqrt{\dfrac{40\pi - 4\alpha}{g}}. \end{cases} \tag{16}$$

Risolvendo il sistema si trova le componenti della reazione vincolare in funzione della posizione del punto materiale, da cui, si ottiene il vettore reazione vincolare $\boldsymbol{N} = (N_x, N_y, N_z)$.

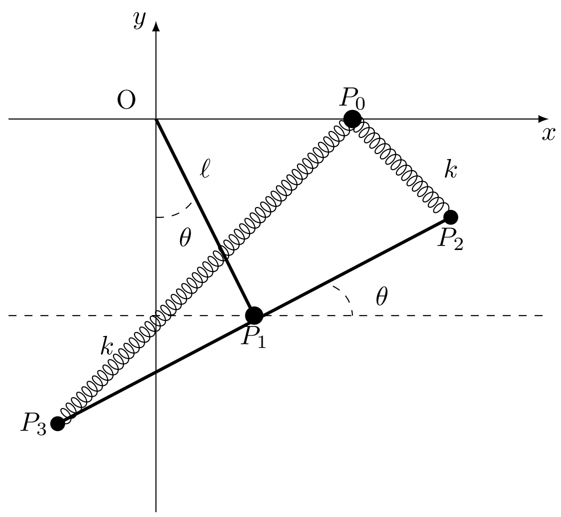
□

Meccanica razionale – Lagrangiana #22

Esercizio 22 (★★★☆☆). Un sistema meccanico è costituito da 4 punti materiali P_0, P_1, P_2, e P_3 tutti di massa m, vincolati a muoversi nel piano verticale Oxy nel modo seguente (si veda la figura):

- P_0 si muove lungo l'asse x;
- P_1 è collegato al punto O tramite un'asta A_1 di massa trascurabile e lunghezza $\ell_1 = 1$;
- P_1 è il punto di mezzo di un'asta A_2 di massa trascurabile e lunghezza $\ell_2 = 2$ che si mantiene ortogonale all'asta A_1 e ai cui estremi sono collocati i punti P_2 e P_3;
- due molle, entrambe di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile, collegano i punti P_2 e P_3 al punto P_0;
- infine sul sistema agisce la forza peso (sia g l'accelerazione di gravità).

1) Si scriva la lagrangiana del sistema (come coordinate lagrangiane si possono utilizzare l'ascissa x del punto P_0 e l'angolo θ che l'asta A_1 forma con l'asse y negativo, come illustrato in figura);
2) si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange;
3) si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.



Svolgimento. Le coordinate dei punti sono

$$\begin{aligned}
P_0 &= (x_0, y_0) = (x, 0)\,;\\
P_1 &= (x_1, y_1) = (\sin\theta, -\cos\theta)\,;\\
P_2 &= (x_2, y_2) = (\sin\theta + \cos\theta, -\cos\theta + \sin\theta)\,;\\
P_3 &= (x_3, y_3) = (\sin\theta - \cos\theta, -\cos\theta - \sin\theta)\,.
\end{aligned}$$

Calcoliamo la velocità

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{r}}_{P_0} &= (\dot{x}, 0)\,;\\
\dot{\boldsymbol{r}}_{P_1} &= \left(\dot\theta\cos\theta, \dot\theta\sin\theta\right);\\
\dot{\boldsymbol{r}}_{P_2} &\equiv \left(\dot\theta\cos\theta - \dot\theta\sin\theta, \dot\theta\sin\theta + \dot\theta\cos\theta\right)\\
\dot{\boldsymbol{r}}_{P_3} &= \left(\dot\theta\cos\theta + \dot\theta\sin\theta, \dot\theta\sin\theta - \dot\theta\cos\theta\right).
\end{aligned}$$

Calcoliamo i moduli quadri delle velocità, cioè

$$
\begin{aligned}
|\dot{\boldsymbol{r}}_{P_0}|^2 &= \dot{x}^2;\\
|\dot{\boldsymbol{r}}_{P_1}|^2 &= \dot{\theta}^2;\\
|\dot{\boldsymbol{r}}_{P_2}|^2 &= 2\dot{\theta}^2;\\
|\dot{\boldsymbol{r}}_{P_3}|^2 &= 2\dot{\theta}^2.
\end{aligned}
$$

L'energia cinetica è

$$
T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(5\dot{\theta}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + 5\dot{\theta}^2\right). \tag{1}
$$

Calcoliamo

$$
\begin{aligned}
\overline{P_0P_2}^2 &= (x - \sin\theta - \cos\theta)^2 + (\cos\theta - \sin\theta)^2 =\\
&= x^2 + 1 + 1 - 2x\sin\theta - 2x\cos\theta =\\
&= x^2 - 2x(\cos\theta + \sin\theta) + 2
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\overline{P_0P_3}^2 &= (x - \sin\theta + \cos\theta)^2 + (\cos\theta + \sin\theta)^2 =\\
&= x^2 + 2 - 2x\sin\theta + 2x\cos\theta =\\
&= x^2 + 2 + 2x(\cos\theta - \sin\theta),
\end{aligned}
$$

da cui è possibile determinare l'energia potenziale, ovvero

$$
\begin{aligned}
U &= mgy_0 + mgy_1 + mgy_2 + mgy_3 + \frac{1}{2}k\left(\overline{P_0P_2}^2 + \overline{P_0P_3}^2\right) + \text{costante} =\\
&= mg(-\cos\theta) + mg(-\cos\theta + \sin\theta) + mg(-\cos\theta - \sin\theta) +\\
&+ \frac{1}{2}k\left(2x^2 - 2x(\cos\theta + \sin\theta + \sin\theta - \cos\theta)\right) + \text{costante} =\\
&= -3mg\cos\theta + k\left(x^2 - 2x\sin\theta\right) + \text{costante}.
\end{aligned}
$$

La lagrangiana è

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}\right) &= T - U =\\
&= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + 5\dot{\theta}^2\right) + 3mg\cos\theta - k\left(x^2 - 2x\sin\theta\right) + \text{costante}.
\end{aligned}
$$

Si conclude che la lagrangiana è

$$
\boxed{\mathcal{L}\left(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + 5\dot{\theta}^2\right) + 3mg\cos\theta - k\left(x^2 - 2x\sin\theta\right) + \text{costante}.}
$$

Calcoliamo le equazione di Eulero-Lagrange. Abbiamo dunque

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\\[2ex]
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}
\end{cases}
$$

da cui

$$
\boxed{\begin{cases}
m\ddot{x} = -k(2x - 2\sin\theta)\\[2ex]
5m\ddot{\theta} = -3mg\sin\theta - 2kx\cos\theta.
\end{cases}}
$$

Per lo studio dei punti di equilibrio prendiamo $\theta \in (-\pi, \pi]$. Imponiamo
$$\nabla U = (0, 0), \tag{2}$$
cioè
$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \theta} = 0, \end{cases} \tag{3}$$
o anche
$$\begin{cases} k\,(2x - 2\sin\theta) = 0 \\ \\ 3mg\sin\theta - 2kx\cos\theta = 0 \end{cases} \tag{4}$$
da cui
$$\begin{cases} x = \sin\theta \\ \sin\theta\,(3mg - 2kx\cos\theta) = 0. \end{cases} \tag{5}$$
Le soluzioni banali sono
$$A_1 = (x, \theta) = (0, 0)\,;\, A_2 = (x, \theta) = (0, +\pi)\,. \tag{6}$$
inoltre, si ha
$$\cos\theta = \frac{3mg}{2k} = \alpha, \qquad \text{con } \alpha > 0. \tag{7}$$
L'equazione (7) esiste se e solo se $0 < \alpha \le 1$. Da (7) si trova
$$A_{3,4} = (\sin(\pm\arccos(\alpha))\,, \pm\arccos(\alpha)) = \tag{8}$$
$$= \left(\pm\sqrt{1 - \cos^2\arccos\alpha}, \pm\arccos(\alpha)\right) = \tag{9}$$
$$= \left(\pm\sqrt{1-\alpha^2}, \pm\arccos(\alpha)\right). \tag{10}$$
Calcoliamo la matrice Hessiana per U.
Abbiamo dunque
$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \dfrac{\partial U}{\partial x \partial \theta} \\ \\ \dfrac{\partial^2\, U}{\partial \theta \partial x} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k & -2k\cos\theta \\ \\ -2k\cos\theta & 3mg\cos\theta + 2kx\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{11}$$
Valutiamo
$$H\,(A_1) = \begin{pmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 3mg \end{pmatrix}, \tag{12}$$
da cui
$$\det H\,(A_1) = \begin{pmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 3mg \end{pmatrix} = 6mgk - 4k^2 = 4k^2\left(\frac{3mg}{2k} - 1\right) = 4k^2\,(\alpha - 1)\,. \tag{13}$$
Se $\alpha > 1$ il determinante della matrice è positivo e $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2k > 0$ da cui deduciamo che A_1 è stabile.
Se $\alpha = 1$ il determinante della matrice è nullo, pertanto lo studio della natura del punto A_1 richiede un supplemento d'indagine. Per $\alpha = 1$ il potenziale diventa
$$U = k\left(-\frac{3mg}{2k}\cdot 2 + x^2 - 2x\sin\theta\right) = k\left(-2\alpha + x^2 - 2x\sin\theta\right) = k\left(-2 + (x - \sin\theta)^2 - \sin^2\theta\right),$$
da cui
$$U - U(0,0) = k\left(\cancel{-2} + (x - \sin\theta)^2 - \sin^2\theta \cancel{+2}\right) = k\left((x - \sin\theta)^2 - \sin^2\theta\right).$$
Prendiamo la restrizione $\tilde{U} = U(\sin\theta, \theta)$, ottenendo
$$U - U\,(-1, \pi) = -k\sin^2\theta < 0,\ \forall\theta \in \mathbb{R}. \tag{14}$$
In questa restrizione il potenziale U assume un massimo, pertanto il punto $(0, 0)$ è una sella o un massimo, questo è sufficiente per concludere che tale punto è instabile.
Non è necessario indagare sulla natura esatta del punto $(0, 0)$ (ovvero se è una sella o un massimo) perchè in ogni caso sarebbe un punto di equilibrio instabile.

Se $0 < \alpha < 1$ il determinante della matrice è negativo pertanto il punto A_1 è instabile.
Valutiamo

$$H(A_2) = \begin{pmatrix} 2k & 2k \\ 2k & -3mg \end{pmatrix}, \tag{15}$$

da cui

$$\det H(A_2) = -6mgk - 4k^2 = -4k^2 \left(1 + \frac{3mg}{2k}\right) = -4k^2 (1+\alpha).$$

Il determinante è sempre negativo per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, pertanto A_2 è instabile.
Valutiamo

$$H(A_3) = \begin{pmatrix} 2k & -2k\cos(\arccos(\alpha)) \\ -2k\cos(\arccos(\alpha)) & 3mg\alpha + 2k\sqrt{1-\alpha^2}\sin(\arccos\alpha) \end{pmatrix} = \tag{16}$$

$$= \begin{pmatrix} 2k & -2k\alpha \\ -2k\alpha & 3mg\alpha + 2k\left(1-\alpha^2\right) \end{pmatrix}, \tag{17}$$

da cui

$$\begin{aligned} \det H(A_3) &= 2k\left(3mg\alpha + 2k\left(1-\alpha^2\right)\right) - 4k^2\alpha^2 = \\ &= 4k^2\left(\frac{3mg}{2k}\alpha + \alpha^2 - 1 - \alpha^2\right) = \\ &= 4k^2\left(\alpha^2 - 1\right) = \\ &= 4k^2(\alpha-1)(\alpha+1) = \\ &= \underbrace{4k^2(\alpha+1)}_{>0}(\alpha-1). \end{aligned}$$

Per $0 < \alpha < 1$ il punto A_3 è instabile.
Il caso $\alpha = 1$ il determinante si annulla e pertanto lo studio del punto A_3 richiede un supplemento d'indagine. Osserviamo che il punto A_3 diventa $(0,0)$, già studiando in precedenza.
Valutiamo

$$H(A_3) = \begin{pmatrix} 2k & -2k\cos(\arccos(\alpha)) \\ -2k\cos(\arccos(\alpha)) & 3mg\alpha + 2k\sqrt{1-\alpha^2}\sin(\arccos\alpha) \end{pmatrix} = \tag{18}$$

$$= \begin{pmatrix} 2k & -2k\alpha \\ -2k\alpha & 3mg\alpha + 2k\left(1-\alpha^2\right) \end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$H(A_4) = \begin{pmatrix} 2k & -2k\cos(-\arccos(\alpha)) \\ -2k\cos(-\arccos(\alpha)) & 3mg\alpha - 2k\sqrt{1-\alpha^2}\sin(-\arccos\alpha) \end{pmatrix} = \tag{20}$$

$$= \begin{pmatrix} 2k & -2k\alpha \\ -2k\alpha & 3mg\alpha + 2k\left(1-\alpha^2\right) \end{pmatrix}, \tag{21}$$

da cui

$$\det H(A_4) = \det H(A_3) = \underbrace{4k^2(\alpha+1)}_{>0}(\alpha-1). \tag{22}$$

Se $0 < \alpha < 1$ il punto A_4 è instabile.
Se $\alpha = 1$ lo studio della natura del punto A_4 richiede un supplemento di indagine e in particolare per $\alpha = 1$ il punto diventa $(0,0)$, già studiando in precedenza .

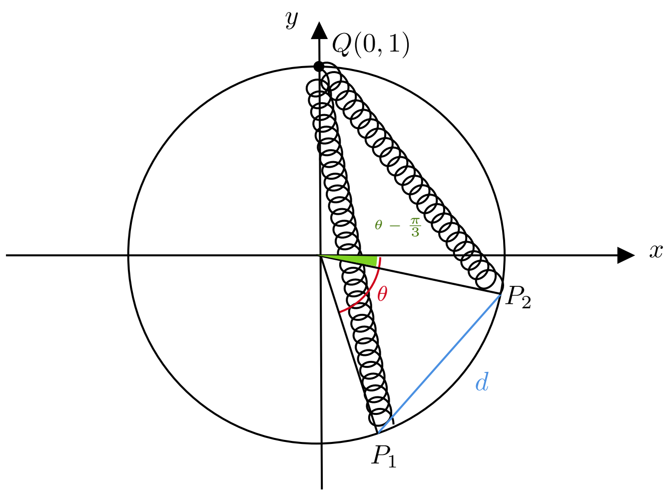
Se $\alpha > 1$ il determinante è positivo e $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2k > 0$ quindi il punto A_4 è stabile.

$\square$

Meccanica razionale – Lagrangiana #23

Esercizio 23 (★★☆☆☆). Un sistema meccanico è costituito da due punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa $m = 1$, sono vincolati a muoversi in un piano verticale lungo una guida circolare di raggio $r = 1$ in modo tale che la mutua distanza resti fissata al valore $d = 1$. I due punti sono inoltre collegati, entrambi tramite una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile, al punto più alto della guida. Sia g l'accelerazione di gravità.

1) Si scriva la lagrangiana del sistema. Può essere conveniente fissare un sistema di coordinate (x, y) in cui il centro della guida coincida con l'origine e utilizzare come coordinata lagrangiana l'angolo θ che il punto P_1 forma con l'asse x, come nella figura che segue. Si ricordino anche le relazioni trigonometriche
$$\sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{e} \qquad \cos(\pi/3) = 1/2.$$
2) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3) Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
4) Si dimostri che in opportune variabili il sistema si comporta o come un pendolo o come un sistema libero, a seconda dei valori dei parametri.



Svolgimento. Dalla geometria del problema risulta chiaro che[1]
$$P_1 = (\cos\theta, -\sin\theta)$$
e
$$P_2 = \left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right), -\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\right),$$
dove $\theta \in \mathbb{R}$. Le velocità di P_1 e P_2 sono rispettivamente
$$\dot{\boldsymbol{r}}_{P_1} = \left(-\dot\theta\ \sin\theta, -\dot\theta\ \cos\theta\right)$$
e
$$\dot{\boldsymbol{r}}_{P_2} = \left(-\dot\theta\ \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right), -\dot\theta\ \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\right).$$
da cui
$$|\dot{\boldsymbol{r}}_{P_1}|^2 = |\dot{\boldsymbol{r}}_{P_2}|^2 = \dot\theta^2.$$
L'energia cinetica è
$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot\theta^2 + \dot\theta^2\right) = m\dot\theta^2.$$

[1] Il triangolo OP_1P_2 è equilatero, pertanto tutti gli angoli sono di $\pi/3$. Si osservi che l'angolo in verde nella figura di sopra è $\theta - \pi/3$.

Calcoliamo

$$\overline{QP_1}^2 = \cos^2\theta + (1+\sin\theta)^2 = 2 + 2\sin\theta$$

e

$$\overline{QP_2}^2 = \cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \left(1 + \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\right)^2 = 2 + 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right).$$

L'energia potenziale è

$$\begin{aligned} U &= mg(-\sin\theta) + mg\left(-\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\right) + \frac{1}{2}k(2\sin\theta + 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)) + \text{costante} = \\ &= \left(\sin\theta + \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\right)(k - mg) + \text{costante}. \end{aligned}$$

La lagrangiana è

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \dot{\theta}^2 + (mg - k)\left(\sin\theta + \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\right) + \text{costante}.}$$

L'equazioni di Eulero-Lagrange è

$$\ddot{\theta} = (g - k)\left(\cos\theta + \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Per lo studio delle posizione di equilibrio prendiamo $\theta \in [0, 2\pi)$. Poniamo

$$\frac{dU}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad (g - k)\left(\cos\theta + \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\right) = 0,$$

da cui

$$\cos\theta + \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = 0,$$

i.e.

$$\frac{3}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = 0. \tag{1}$$

Si osservi che $\theta = \frac{\pi}{2}$ o $\theta = \frac{3}{2}\pi$ non sono soluzione dell'equazione (1), pertanto è possibile dividere ambo i membri di (1) per $\cos\theta$, ottenendo

$$\tan\theta = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3} \vee \theta = \frac{4}{3}\pi.$$

Calcoliamo

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \underbrace{(k - g)}_{=:\alpha}\left(-\sin\theta - \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \alpha\left(-\sin\theta - \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\right),$$

conseguentemente

$$\frac{d^2U}{dt^2}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha.$$

Se $\alpha > 0$ allora $\frac{\pi}{3}$ è un punto di equilibrio instabile, mentre per $\alpha < 0$ si ha che $\frac{\pi}{3}$ è un punto di equilibrio stabile.

Valutiamo

$$\frac{d^2U}{dt^2}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha,$$

da cui deduciamo che se $\alpha > 0$ allora $\frac{\pi}{3}$ è un punto di equilibrio stabile, mentre per $\alpha < 0$ $\frac{\pi}{3}$ è un punto di equilibrio instabile.

Osserviamo che se $\alpha = 0$ allora $\ddot{\theta} = 0$ che implica $\dot{\theta}$ =costante. Quindi in questo caso "degenere" il sistema è libero. Se invece $g \neq k$ dall'equazione di Eulero-Lagrange si osserva che il sistema si comporta come un pendolo semplice.

$\square$

Meccanica razionale – Lagrangiana #26

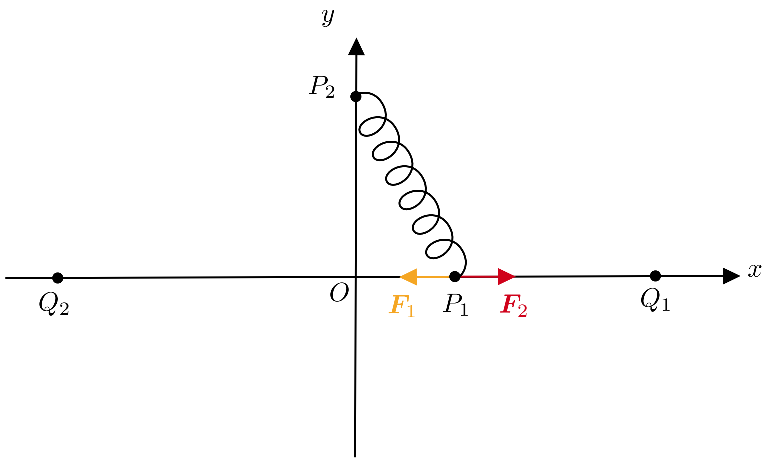
Esercizio 26 (★★☆☆☆). Due punti materiali P_1 e P_2 di massa m si muovono su un piano verticale, che identifichiamo con il piano xy. Il piano ruota intorno all'asse verticale y con velocità angolare costante ω; i due punti sono sottoposti alla forza di gravità (si indichi con g l'accelerazione di gravità) e alla forza centrifuga, e sono inoltre collegati da una molla lunghezza a riposo trascurabile e di costante elastica $k < m\omega^2$; il punto P_2 scorre lungo l'asse y; infine il punto P_1 si muove lungo l'asse x e interagisce con due punti fissi $Q_1 = (1, 0)$ e $Q_2 = (-1, 0)$, tramite due forze conservative repulsive $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$ di intensità rispettivamente $\alpha d(P_1, Q_1)^{-2}$ e $\alpha d(P_1, Q_2)^{-2}$ dove $\alpha > 0$ e $d(P_1, Q_i)$ è la distanza tra P_1 e Q_i con $i = 1, 2$ (si veda la figura).

1) Determinare le energie potenziali $V_1(x)$ e $V_2(x)$ tali che $\boldsymbol{F}_1 = -(\partial V_1/\partial x, 0)$ e $\boldsymbol{F}_2 = -(\partial V_2/\partial x, 0)$.

2) Scrivere la lagrangiana del sistema (come coordinate lagrangiane si possono utilizzare l'ascissa x del punto P_1 e l'ordinata y del punto P_2).

3) Scrivere le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.

Si assuma P_1 compreso tra Q_1 e Q_2.



Svolgimento. Punto 1. Per come sono definite le forze $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$ è chiaro che deve valere $x \neq \pm 1$. Infatti in corrispondenza del punto $x = 1$ il modulo della forza $\boldsymbol{F}_1$ diverrebbe infinito e il modulo della forza $\boldsymbol{F}_2$ in corrispondenza del valore $x = -1$ diverrebbe infinito, e quindi è chiaro che Q_1 e Q_2 costituiscono una barriera che non si può oltrepassare. Da quanto detto deduciamo che P_1 è vincolato a rimanere tra Q_1 e Q_2. La situazione del problema è equivalente a quella di tre cariche q_1, q_2 e q_3 dello stesso segno, di cui q_1 e q_2 sono vincolate a rimanere rispettivamente nei punti Q_1 e Q_2, e q_3 è libera di muoversi sull'asse delle x (ovvero coincide con il punto P_1). Inoltre, la carica q_1 è attaccata ad una molla ideale al punto P_2.

Sul punto materiale P_1, per la seconda legge della dinamica lungo l'asse delle x, si ha

$$-|\boldsymbol{F}_1| + |\boldsymbol{F}_2| - kx = m\ddot{x}$$

dove kx è la componente orizzontale della forza della molla e $\ddot{x}$ è l'accelerazione lungo l'asse delle x di m. Per la geometria del problema le coordinate di P_1 e P_2 sono rispettivamente $(x, 0)$ e $(0, y)$.
Quindi $\overline{P_1Q_1} = |1 - x|$ e $\overline{P_1Q_2} = |x + 1|$, da cui

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x} = \dfrac{\alpha}{(x-1)^2} \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial x} = -\dfrac{\alpha}{(x+1)^2}, \end{cases} \tag{1}$$

da cui

$$\begin{cases} V_1(x) = \alpha \displaystyle\int (x-1)^{-2}\, dx = -\alpha(x-1)^{-1} + c \\ \\ V_2(x) = -\alpha \displaystyle\int (x+1)^{-2}\, dx = \alpha(x+1)^{-1} + k, \end{cases}$$

dove c e k sono costanti.
Si osservi che le derivate parziali dei due potenziale V_1 e V_2 rispettivamente nella prima e nella seconda equazione del sistema hanno segno differente. Questo perché le forze $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$ sono repulsive.

Punto 2. La velocità di P_1 e P_2 sono rispettivamente

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{P_1} = (\dot{x}, 0) \qquad \text{e} \qquad \dot{\boldsymbol{r}}_{P_2} = (0, \dot{y}),$$

da cui

$$|\dot{\boldsymbol{r}}_{P_1}| = |\dot{x}| \qquad \text{e} \qquad |\dot{\boldsymbol{r}}_{P_2}| = |\dot{y}| .$$

L'energia cinetica del sistema è

$$T(\dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \tag{2}$$

Il punto materiale P_1, oltre ad essere soggetto alla forza della molla, alla forza peso e alle due forze conservative dovute all'interazione con Q_1 e Q_2, è soggetto alla forza centrifuga. Il punto materiale P_2 è soggetto alla forza peso e alla forza della molla. Si osservi che P_1 è soggetto anche alla forza di Coriolis che è annullata dalla reazione vincolare generata dal vincolo; analogamente ciò vale per il punto materiale P_2.
L'energia totale del sistema è

$$\begin{aligned} U(x, y) &= mgy + \frac{1}{2}k\overline{P_1P_2}^2 + V_1(x) + V_2(x) - \frac{1}{2}m\omega^2 x + \text{costante} = \\ &= mgy + \frac{1}{2}k(x + y)^2 - \alpha(x - 1)^{-1} + \alpha(x + 1)^{-1} - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \text{costante}. \end{aligned}$$

Si osservi che $-\frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ è il potenziale centrifugo.
Si conclude che la lagrangiana del sistema è

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = T(\dot{x}, \dot{y}) - U(x, y) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) + \frac{\alpha}{x - 1} - \frac{\alpha}{x + 1} + 6\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \text{costante},$$

o anche

$$\boxed{\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) + \frac{2\alpha}{x^2 - 1} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \text{costante}.}$$

Punto 3. Calcoliamo le equazioni di Eulero-Lagrange. Abbiamo dunque

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}, \end{cases} \tag{3}$$

da cui conseguentemente

$$\boxed{\begin{cases} m\ddot{x} = -kx - \dfrac{4x\alpha}{(x^2 - 1)^2} + \dfrac{1}{2}m\omega^2 x \\[2ex] m\ddot{y} = -my - ky. \end{cases}}$$

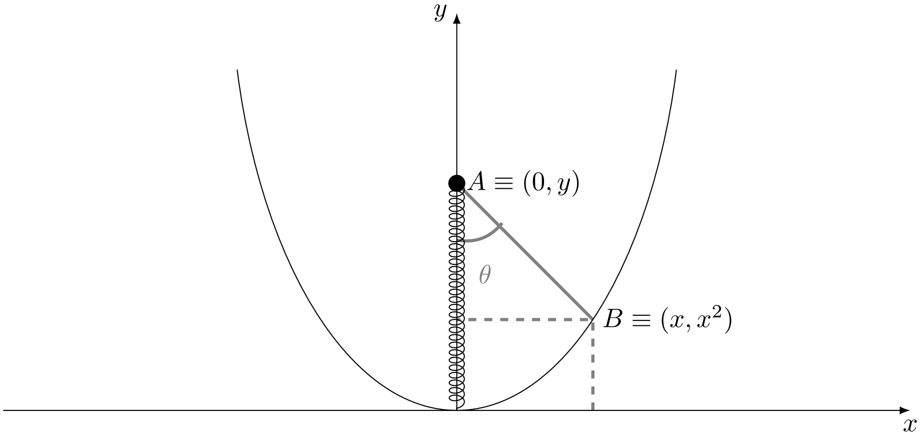
□

Meccanica razionale – Lagrangiana #26

Esercizio 27 (★★★☆☆). Un'asta omogenea di lunghezza $\ell = 1$ e di massa m si muove nel piano verticale xy in modo tale che un estremo A scorre lungo l'asse y (asse verticale) e l'altro estremo B scorre lungo il profilo parabolico di equazione $y = x^2$. L'asta è soggetta alla forza di gravità (sia g l'accelerazione di gravità) e il suo estremo A è collegato al punto più basso del profilo tramite una molla di lunghezza a riposto trascurabile e di costante elastica k. All'istante iniziale l'asta forma un angolo $\pi/2$ con l'asse y.

1) Si scrivano le posizioni del punto A e del centro di massa C dell'asta in termini dell'angolo θ che l'asta forma con l'asse y.

2) Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange utilizzando l'angolo θ come variabile lagrangiana.



Svolgimento. Punto 1. Dalla geometria del problema abbiamo

$$y - x^2 = \ell \cos\theta \quad \Rightarrow \quad y = x^2 + \ell\cos\theta, \tag{1}$$

dove $x = \ell \sin\theta$.
Le coordinate dei punti A e B, in funzione di θ, sono rispettivamente

$$\ell(0, \ell\sin^2\theta + \cos\theta). \tag{2}$$

e

$$\ell(\sin\theta, \ell\sin^2\theta) \tag{3}$$

Punto 2. da cui si trovano le coordinate del centro di massa, cioè

$$\mathrm{CM} = \ell\left(\frac{1}{2}\sin\theta, \frac{2\ell\sin^2\theta + \cos\theta}{2}\right). \tag{4}$$

Per calcolare l'energia del sistema applichiamo il teorema di König.
La velocità del centro di massa CM è

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{CM}} = \left(\frac{\ell}{2}\dot\theta\cos\theta, \frac{\ell^2\dot\theta\sin(2\theta) - \ell\dot\theta\sin\theta}{2}\right). \tag{5}$$

Il modulo quadro della velocità del centro di massa è

$$|\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{CM}}|^2 = \frac{\ell}{4}^2\dot\theta^2\cos^2\theta + \left(\frac{\ell^2\dot\theta\sin(2\theta) - \ell\dot\theta\sin\theta}{2}\right)^2 = \tag{6}$$

$$= \frac{\ell^2}{4}\dot\theta^2 + \frac{\ell^4\dot\theta^2\sin^2(2\theta)}{4} - \frac{\ell^3\dot\theta\sin(2\theta)\sin\theta}{2}. \tag{7}$$

L'energia cinetica dell'asta è

$$T(\dot\theta) = \frac{1}{2}m\;|\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{CM}}|^2 + \frac{1}{2}I_{\mathrm{CM}}\;\dot\theta^2, \tag{8}$$

dove $I_{\rm CM}$ è il momento d'inerzia dell'asta rispetto al proprio centro di massa e vale $1/(12)M\ell^2$. Abbiamo dunque

$$T = \frac{1}{2}m\ |\dot{\boldsymbol{r}}_{\rm CM}|^2 + \frac{1}{2}I_{\rm CM}\ \dot\theta^2 = \tag{9}$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{\ell^2}{4}\dot\theta^2 + \frac{\ell^4\dot\theta^2\sin^2(2\theta)}{4} - \frac{\ell^3\dot\theta\sin(2\theta)\sin\theta}{2}\right) + \frac{1}{24}m\ \ell^2\dot\theta^2 = \tag{10}$$

$$= \frac{1}{6}m\ \dot\theta^2\ell^2 + \frac{1}{8}\ m\ \ell^4\dot\theta^2\sin^2(2\theta) - \frac{1}{4}m\ \ell^3\dot\theta\sin(2\theta)\sin\theta. \tag{11}$$

L'energia potenziale è

$$U(\theta) = m\,g\,y_{\rm CM} + \frac{1}{2}ky^2 + \text{costante} = \tag{12}$$

$$= mg\left(\frac{2\ell^2m^2\theta + \ell\cos\theta}{2}\right) + \frac{1}{2}k(\ell^2\sin^2\theta + \ell\cos\theta)^2 + \text{costante}. \tag{13}$$

La lagrangiana del sistema è

$$\mathcal{L}(\theta,\dot\theta) = T - U = \tag{14}$$

$$= \frac{1}{6}m\dot\theta^2\ell^2 + \frac{1}{8}m\ell^4\dot\theta^2\sin^2(2\theta) - \frac{1}{4}m\ell^3\dot\theta\sin(2\theta)\sin\theta + \tag{15}$$

$$- \frac{mg}{2}\left(2\ell^2\sin^2(\theta) + \ell\cos\theta\right) - \frac{1}{2}k(\ell^2\sin^2\theta + \ell\cos\theta)^2 + \text{costante}. \tag{16}$$

Punto 2. Calcoliamo l'equazione di Eulero-Lagrange. Abbiamo dunque

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}, \tag{17}$$

da cui

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}m\dot\theta\ell^2 + \frac{1}{4}m\ell^4\dot\theta\sin^2(2\theta) - \frac{1}{4}m\ell^3\sin(2\theta)\sin\theta\right) = \tag{18}$$

$$= \frac{1}{8}m\ell^4\dot\theta^2\left(2\sin\left(2\theta\right)\cos\left(2\theta\right)\right)2 - \frac{1}{4}m\ell^3\dot\theta\left(2\cos\left(2\theta\right)\sin\theta + \sin\left(2\theta\right)\cos\theta\right) + \tag{19}$$

$$- \frac{mg}{2}\left(2\ell^2\left(2\sin\theta\cos\theta\right) - \ell\sin\theta\right) - \frac{1}{2}k\left(2\left(\ell^2\sin^2\theta + \ell\cos\theta\right)\right)\left(2\ell^2\sin\theta\cos\theta - \ell\sin\theta\right), \tag{20}$$

o anche

$$\frac{1}{3}m\ddot\theta\ell^2 + \frac{1}{4}m\ell^4\left(\ddot\theta\sin^2\left(2\theta\right) + \dot\theta\left(2\sin\theta\cos\theta\right)\left(2\dot\theta\right)\right) + \tag{21}$$

$$- \frac{1}{4}m\ell^3\left(\cos\left(2\theta\right)\left(2\dot\theta\right)\sin\theta + \sin\left(2\theta\right)\dot\theta\cos\theta\right) = \frac{1}{4}m\ell^4\dot\theta^2\sin\left(4\theta\right) + \tag{22}$$

$$- \frac{1}{4}m\ell^3\dot\theta\left(2\cos\left(2\theta\right)\sin\theta + \sin\left(2\theta\right)\cos\theta\right) - mg\ell^2\left(\sin\left(2\theta\right) - \ell\sin\theta\right) + \tag{23}$$

$$- k\left(\ell^2\sin^2\theta + \ell\cos\theta\right)\left(\ell^2\sin\left(2\theta\right) - \ell\sin\theta\right), \tag{24}$$

pertanto

$$\frac{1}{3}m\ddot\theta\ell^2 + \frac{1}{4}m\ell^4\left(\ddot\theta\sin^2\left(2\theta\right) + 2\dot\theta^2\sin\left(2\theta\right)\right) + \tag{25}$$

$$- \frac{1}{4}m\ell^3\left(2\dot\theta\sin\left(\theta\right)\cos\left(2\theta\right) + \dot\theta\cos\theta\sin\left(2\theta\right)\right) = \frac{1}{4}m\ell^4\dot\theta^2\sin\left(2\theta\right) + \tag{26}$$

$$- k\left(\ell^2\sin^2\theta + \ell\cos\theta\right)\left(\ell^2\sin\left(2\theta\right) - \ell\sin\theta\right). \tag{27}$$

$\square$

Meccanica razionale – Hamiltoniana #1

Esercizio 1 (★☆☆☆☆). Per $q \in \mathbb{R}, q > 0$, si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^2}{2q^2} - \ln q.$$

1. Determinare l'hamiltoniana del sistema.
2. Scrivere le equazioni di Hamilton del sistema.
3. Determinare la trasformazione canonica generata dalla funzione generatrice di seconda specie $F(q, P) = P \ln q$.
4. Usare la trasformazione canonica trovata al punto precedente per ricavare le equazioni del moto con dati iniziali $q(0) = 1,\ p(0) = 0$.

Svolgimento. Punto 1. (*Metodo I*) Ricordiamo che, data la lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q})$, si definisce il momento cinetico

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}).$$

Quando la funzione $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(q, \cdot)$ è invertibile, allora possiamo esprimere $\dot{q}$ in termini di p e definire l'hamiltoniana del sistema come la funzione

$$H(q, p) := p\dot{q} - \mathcal{L}.$$

Nel nostro caso, la funzione

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\dot{q}}{q^2}$$

è chiaramente invertibile (vista come funzione di $\dot{q}$) per ogni $q > 0$, e abbiamo

$$\dot{q} = pq^2.$$

Quindi

$$\begin{aligned} H(q, p) &= p(pq^2) - \frac{1}{2}\frac{(pq^2)^2}{q^2} + \ln q \\ &= p^2q^2 - \frac{p^2q^2}{2} + \ln q = \frac{p^2q^2}{2} + \ln q, \end{aligned}$$

da cui otteniamo

$$H(q, p) = \frac{p^2q^2}{2} + \ln q. \tag{1}$$

In definitiva, l'hamiltoniana del sistema è

$$H(q,p) = \frac{p^2 q^2}{2} + \ln q.$$

Punto 1. (*Metodo II*) Vediamo un metodo alternativo e, a volte, più diretto di determinare l'hamiltoniana. Dimostriamo prima il caso generale, quindi lo applicheremo al nostro caso specifico. Sia la lagrangiana del sistema della forma

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = f(q)\frac{\dot{q}^2}{2} + g(q) \tag{2}$$

per funzioni $f(q), g(q)$, con $f(q) \neq 0$ per ogni q.
In questo caso

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = f(q)\dot{q},$$

ovvero, visto che $f(q) \neq 0$,

$$\dot{q} = \frac{p}{f(q)}.$$

Pertanto

$$H(p,q) = p\dot{q} - \mathcal{L} = \frac{p^2}{f(q)} - f(q)\frac{p^2}{2f(q)^2} - g(q) = \frac{p^2}{2f(q)} - g(q),$$

ovvero, se la lagrangiana ha la forma (2), allora l'hamiltoniana corrispondente è

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2f(q)} - g(q). \tag{3}$$

Nel caso specifico dell'esercizio, abbiamo

$$f(q) = \frac{1}{q^2} \qquad \text{e} \qquad g(q) = -\ln q.$$

Pertanto, da (3) si ha

$$H(p,q) = \frac{p^2 q^2}{2} + \ln q,$$

ottenendo lo stesso risultato fornito dal Metodo I.

Punto 2. Le equazioni di Hamilton del moto sono date da:

$$\begin{cases} \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \\[2ex] \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p}. \end{cases}$$

Usando (1), abbiamo

$$-\frac{\partial H}{\partial q} = -\left(p^2 q + \frac{1}{q}\right)$$

e

$$\frac{\partial H}{\partial p} = pq^2,$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\left(p^2 q + \frac{1}{q}\right), \\ \dot{q} &= pq^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Le equazioni di Hamilton del nostro sistema sono pertanto

$$\boxed{\begin{cases} \dot{p} = -\left(p^2 q + \frac{1}{q}\right) \\ \dot{q} = pq^2. \end{cases}}$$

Punto 3. Determiniamo la trasformazione canonica data dalla funzione generatrice di seconda specie

$$F(q, P) = P \ln q,$$

ovvero vogliamo ricavare la trasformazione

$$\begin{cases} Q = Q(q, p, t) \\ P = P(q, p, t) \end{cases}$$

tale che F sia la funzione generatrice, i.e. che soddisfi

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial F}{\partial q} \\ Q = \dfrac{\partial F}{\partial P}. \end{cases}$$

Si ha

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{P}{q} \\ Q &= \frac{\partial F}{\partial P} = \ln q, \end{aligned} \tag{5}$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned} P &= pq, \\ Q &= \ln q. \end{aligned} \tag{6}$$

In definitiva, la trasformazione cercata è data da

$$\boxed{\begin{cases} P = pq \\ Q = \ln q. \end{cases}}$$

Punto 4. Vogliamo determinare le equazioni del moto $p(t), q(t)$ che fanno seguito alla condizioni iniziali $q(0) = 1$ e $p(0) = 0$. Determiniamo l'hamiltoniana relativa alla trasformazione ottenuta al punto precedente, ovvero dobbiamo esprimere le variabili q e p in funzione di Q e P e calcolare l'hamiltoniana in (1) in queste nuove variabili. Dalle due equazioni del sistema (6) abbiamo

$$\begin{aligned} q(t) &= e^{Q(t)} \\ p(t) &= P(t)e^{-Q(t)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Dunque l'hamiltoniana cercata è

$$\tilde{H}(P, Q) = \frac{1}{2}(Pe^{-Q})^2 e^{2Q} + \ln e^Q = \frac{P^2}{2} + Q.$$

Le equazioni di Hamilton associate ad $\tilde{H}$ sono

$$\begin{cases} \dot{P} = -\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = -1 \\ \dot{Q} = \dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = P. \end{cases} \tag{8}$$

Integrando ambo i membri, della prima equazione del sistema (8), tra l'istante di tempo $t = 0$ e il generico istante $t > 0$, si ottiene:

$$P(t) - P(0) = \int_0^t -1 ds$$

da cui

$$P(t) = \int_0^t -1 ds = -t + P(0).$$

Pertanto la seconda equazione del sistema (8) diventa

$$\dot{Q} = P(t) = -t + P(0)$$

da cui, integrando, si ha

$$Q(t) = \int_0^t P(s)\, ds = \int_0^t (-s + P(0))\, ds = -\frac{t^2}{2} + P(0)t + Q(0).$$

Poiché per ipotesi

$$q(0) = 1, \quad p(0) = 0,$$

ricordando le equazioni del sistema (6), si ha

$$\begin{aligned} P(0) &= p(0)q(0) = 0, \\ Q(0) &= \ln q(0) = 0. \end{aligned}$$

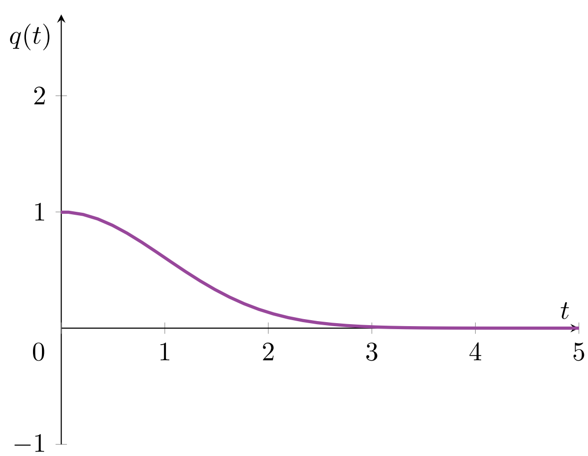
Dunque, si ha

$$\begin{cases} P(t) = -t, \\ \\ Q(t) = -\dfrac{t^2}{2}. \end{cases}$$

Ricordando le (7), per $t \geq 0$ si ottengono le equazioni del moto cercate:

$$\begin{cases} q(t) = e^{Q(t)} = e^{-\frac{t^2}{2}}, \\ \\ p(t) = P(t)e^{-Q(t)} = -te^{\frac{t^2}{2}}. \end{cases}$$

Il seguente grafico rappresenta la curva descrittta dalla legge oraria $q(t)$ in funzione del tempo $t \geq 0$.



Fonte: esami di meccanica analitica del professore Guido Gentile.

Meccanica razionale – Hailtoniana #2

Esercizio 2 (★★★☆☆) Si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}(1+2q^2)^2 e^{2q^2}\dot{q}^2.$$

1. Si determini l'hamiltoniana $\mathcal{H}(q,p)$ associata a $\mathcal{L}(q,\dot{q})$.
2. Si scrivano le equazioni di Hamilton corrispondenti.
3. Si dimostri che la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = q^2 + \ln\left(\dfrac{1+2q^2}{p}\right) \\[2ex] P = \dfrac{qp}{1+2q^2} \end{cases}$$

   è canonica, verificando che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali.
4. Si determini l'hamiltoniana $\mathcal{K}(Q,P)$ nel sistema di coordinate (Q,P).
5. Si usi il risultato del punto precedente per trovare la soluzione $q(t)$ delle equazioni di Hamilton con dati iniziali $(q(0,\dot{q}(0))) = (0,1)$ in forma implicita, ovvero nella forma $f(q(t)) = t$.
6. Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q,P)$ della trasformazione.

Svolgimento. Di seguito presentiamo due procedimenti per il primo punto del problema.

Punto 1. (*Metodo I*) Ricordiamo che, data la lagrangiana $\mathcal{L}(q,\dot{q})$, si definisce il momento cinetico

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q}).$$

Quando la funzione $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(q,\cdot)$ è invertibile, allora possiamo esprimere $\dot{q}$ in termini di p e definire l'hamiltoniana del sistema come la funzione

$$\mathcal{H}(q,p) := p\dot{q} - \mathcal{L}.$$

Nel nostro caso, la funzione

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = (1+2q^2)^2 e^{2q^2}\dot{q}$$

è una funzione lineare (vista come funzione di $\dot{q}$) e quindi è chiaramente invertibile: abbiamo dunque

$$\dot{q} = \frac{p}{(1+2q^2)^2 e^{2q^2}}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(q,p) &= \frac{p^2}{(1+2q^2)^2 e^{2q^2}} - \frac{1}{2}(1+2q^2)^2 e^{2q^2} \left(\frac{p}{(1+2q^2)^2 e^{2q^2}} \right)^2 \\
&= \frac{p^2}{(1+2q^2)^2 e^{2q^2}} - \frac{1}{2} \frac{p^2}{(1+2q^2)^2 e^{2q^2}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{p^2}{(1+2q^2)^2 e^{2q^2}}.
\end{aligned}$$

Si conclude che l'hamiltoniana del sistema è

$$\boxed{\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2} \frac{p^2}{(1+2q^2)^2 e^{2q^2}}.}$$

Punto 1. (*Metodo II*) Proponiamo un metodo alternativo e, a volte, più diretto di determinare l'hamiltoniana. A chi interessa la dimostrazione di questo fatto/risultato, si rimanda al file Hamilton 1.
Sia la lagrangiana del sistema della forma

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = f(q)\frac{\dot{q}^2}{2} + g(q)$$

per funzioni $f(q), g(q)$, con $f(q) \neq 0$ per ogni q. Allora l'hamiltoniana corrispondente è

$$\mathcal{H}(p,q) = \frac{p^2}{2f(q)} - g(q). \tag{1}$$

Nel caso specifico dell'esercizio, abbiamo

$$f(q) = (1+2q^2)^2 e^{2q^2} \qquad \text{e} \qquad g(q) = 0.$$

Pertanto, da (1) si ha

$$\mathcal{H}(p,q) = \frac{p^2}{2(1+2q^2)^2 e^{2q^2}},$$

ottenendo lo stesso risultato fornito dal Metodo I.

Punto 2. Le equazioni di Hamilton del moto sono date da:

$$\begin{cases} \dot{q} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \\[2em] \dot{p} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}. \end{cases} \tag{2}$$

Calcoliamo i termini di destra rispettivamente della prima e seconda equazione del sistema (2). Usando l'hamiltoniana calcolata al punto 1, abbiamo

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} &= -\frac{1}{2}p^2\left(-2(1+2q^2)^{-3}(4q)e^{-2q^2} + (1+2q^2)^{-2}e^{-2q^2}(-4q)\right) \\ &= -\frac{1}{2}p^2(4q)(1+2q^2)^{-2}e^{-2q^2}\left(-2(1+2q^2)^{-1} - 1\right) \\ &= 2p^2q(1+2q^2)^{-2}e^{-2q^2}(1+2+2q^2)(1+2q^2)^{-1} \\ &= 2p^2q(1+2q^2)^{-3}e^{-2q^2}(3+2q^2). \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{1}{2}(2p)(1+2q^2)^{-2}e^{-2q^2} = p(1+2q^2)^{-2}e^{-2q^2},$$

da cui otteniamo le equazioni di Hamilton del nostro sistema:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{p}{(1+2q^2)^2 e^{2q^2}}, \\[2em] \dot{p} = \dfrac{2p^2q(3+2q^2)}{(1+2q^2)^3 e^{2q^2}}. \end{cases}}$$

Punto 3. Consideriamo la trasformazione

$$\begin{cases} Q = q^2 + \ln\left(\dfrac{1+2q^2}{p}\right) \\[2em] P = \dfrac{qp}{1+2q^2}. \end{cases} \tag{3}$$

Per verificare che si tratta di una trasformazione canonica, dobbiamo controllare che le parentesi di Poisson fondamentali soddisfano

$$\{Q,P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1, \tag{4}$$

essendo i casi $\{Q,Q\} = 0$ e $\{P,P\} = 0$ ovvi in dimensione uno (i.e. le variabili q e p sono in $\mathbb{R}$). Calcoliamo i vari termini di (4) separatamente. Sfruttando

(3) otteniamo :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial q} &= 2q + \frac{4q}{1+2q^2};\\
\frac{\partial P}{\partial p} &= \frac{q}{1+2q^2};\\
\frac{\partial Q}{\partial p} &= \frac{p}{1+2q^2}\left(-\frac{1+2q^2}{p^2}\right) = -\frac{1}{p}\\
\frac{\partial P}{\partial q} &= p\left(\frac{1+2q^2-4q^2}{(1+2q^2)^2}\right) = p\left(\frac{1-2q^2}{(1+2q^2)^2}\right).
\end{aligned}
$$

Sostituendo quanto ottenuto nella formula per $\{Q,P\}$ otteniamo

$$
\begin{aligned}
\{Q,P\} &= \left(2q + \frac{4q}{1+2q^2}\right)\cdot\frac{q}{1+2q^2} + \frac{1}{p}\cdot p\cdot\left(\frac{1-2q^2}{(1+2q^2)^2}\right)\\
&= q\left(\frac{2q+4q^3+4q}{(1+2q^2)^2}\right) + \left(\frac{1-2q^2}{(1+2q^2)^2}\right)\\
&= \frac{2q^2+4q^4+1+2q^2}{(1+2q^2)^2}\\
&= \frac{4q^4+4q^2+1}{(1+2q^2)^2}\\
&= \frac{(1+2q^2)^2}{(1+2q^2)^2} = 1,
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\boxed{\{Q,P\} = 1}
$$

come volevasi dimostrare.

Punto 4. Per determinare $\mathcal{K}(Q,P)$ dobbiamo esprimere l'hamiltoniana trovata al punto 1 nelle nuove coordinate Q e P. A tal fine ricordiamo che

$$
\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{(1+2q^2)^2 e^{2q^2}}.
$$

Dimostriamo che

$$
\frac{p^2}{(1+2q^2)^2 e^{2q^2}} = e^{-2Q}, \tag{5}
$$

dal quale dedurremo subito che

$$
\mathcal{K}(Q,P) = \frac{1}{2}e^{-2Q}.
$$

Per provare (5), usiamo la trasformazione canonica del punto precedente, dalla quale segue l'identità:

$$Q - q^2 = \ln\left(\frac{1+2q^2}{p}\right),$$

da cui, per definizione di logaritmo,

$$e^{Q-q^2} = \frac{1+2q^2}{p}.$$

Elevando al quadrato i membri della precedente equazione si ottiene

$$e^{2Q-2q^2} = \left(\frac{1+2q^2}{p}\right)^2,$$

ovvero, considerando i reciproci,

$$e^{-2Q+2q^2} = \frac{p^2}{(1+2q^2)^2}.$$

Infine, dividendo ambo i membri per $e^{2q^2} > 0$ si ha

$$\frac{p^2}{(1+2q^2)^2 e^{2q^2}} = e^{-2Q}.$$

Pertanto la nuova hamiltoniana cercata è

$$\boxed{\mathcal{K}(Q,P) = \tfrac{1}{2}e^{-2Q}.}$$

Punto 5. Si richiede di ottenere un'equazione implicita per il moto $q(t)$ del tipo

$$f(q(t)) = t.$$

Per determinare una tale equazione, vogliamo ottenere le equazioni per $Q(t)$ e $P(t)$ dalle equazioni di Hamilton per l'hamiltoniana $\mathcal{K}$ ottenuta al punto 4, quindi ottenere le equazioni per $q(t)$ e $p(t)$ usando la trasformazione di coordinate data al punto 3.

Ricordiamo che le equazioni di Hamilton per l'hamiltoniana $\mathcal{K}$ trovata al punto precedente sono date da

$$\begin{cases} \dot{Q} = \dfrac{\partial \mathcal{K}}{\partial P} \\[2ex] \dot{P} = -\dfrac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q}. \end{cases}$$

Essendo $\mathcal{K}(Q,P) = \frac{1}{2}e^{-2Q}$, si ha dunque

$$\begin{cases} \dot{Q} = 0 \\[2ex] \dot{P} = e^{-2Q}. \end{cases}$$

La prima equazione del sistema è immediata:

$$Q(t) = Q(0), \quad \forall t \geq 0$$

la quale, inserita nella seconda equazione del sistema, fornisce l'equazione differenziale per $P(t)$:

$$\dot{P} = e^{-2Q(0)}.$$

Integrando ambo i membri tra l'istante di tempo $t = 0$ e il generico istante $t > 0$, si ottiene:

$$P(t) - P(0) = \int_0^t e^{-2Q(0)} ds$$

da cui

$$P(t) = P(0) + te^{-2Q(0)}.$$

Infine, ricordando che

$$\dot{q}(t) = \frac{p(t)}{(1 + 2q^2(t))^2 e^{2q^2(t)}}$$

e

$$\begin{cases} Q(t) = q(t)^2 + \ln\left(\dfrac{1 + 2q(t)^2}{p(t)}\right) \\ \\ P(t) = \dfrac{q(t)p(t)}{1 + 2q(t)^2}, \end{cases} \tag{6}$$

abbiamo

$$\begin{cases} Q(0) = q(0)^2 + \ln\left(\dfrac{1 + 2q(0)^2}{p(0)}\right) \\ \\ P(0) = \dfrac{q(0)p(0)}{1 + 2q(0)^2}, \\ \\ \dot{q}(0) = \dfrac{p(0)}{(1 + 2q^2(0))^2 e^{2q^2(0)}} \end{cases}$$

e le condizioni iniziali fornite dall'esercizio ($q(0) = 0$ e $\dot{q}(0) = 1$) implicano che

$$\begin{cases} Q(0) = 0 \\ \\ P(0) = 0. \end{cases}$$

Abbiamo quindi ottenuto, per ogni $t \geq 0$,

$$\begin{cases} Q(t) = 0 \\ \\ P(t) = t. \end{cases} \tag{7}$$

Per ricavare le equazioni in $q(t)$ e $p(t)$, confrontiamo le equazioni del sistema (3) con quelle del sistema (7), ottenendo

$$\begin{cases} 0 = q^2 + \ln\left(\dfrac{1+2q^2}{p}\right) \\ \\ t = \dfrac{qp}{1+2q^2}. \end{cases} \tag{8}$$

La prima equazione del sistema precedente implica

$$-q^2 = \ln\left(\frac{1+2q^2}{p}\right)$$

da cui

$$e^{-q^2} = \frac{1+2q^2}{p} \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^{q^2} = \frac{p}{1+2q^2}.$$

Usando il risultato appena trovato nella seconda equazione di (8) otteniamo

$$t = q(t)\frac{p(t)}{1+2q(t)^2} = q(t)e^{q(t)^2}.$$

Abbiamo quindi ottenuto l'equazione (implicita) per $q(t)$:

$$\boxed{t = q(t)e^{q(t)^2}}$$

ovvero quanto richiesto dall'esercizio con $f(x) = xe^{x^2}$.

Punto 6. Ricordiamo che una funzione generatrice $F(q, P)$ di seconda specie è una funzione che deve rispettare le seguenti condizioni

$$\begin{cases} Q = \dfrac{\partial F}{\partial P}(q, P) \\ \\ p = \dfrac{\partial F}{\partial q}(q, P). \end{cases} \tag{9}$$

Nel nostro caso, dal sistema (3) abbiamo

$$\begin{cases} Q = q^2 + \ln\left(\dfrac{q}{P}\right) \\ \\ p = \dfrac{P(1+2q^2)}{q}. \end{cases}$$

da cui otteniamo che il sistema (9) diventa

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial P}(q, P) = q^2 + \ln\left(\dfrac{q}{P}\right) \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial q}(q, P) = \dfrac{P(1+2q^2)}{q}. \end{cases} \tag{10}$$

Integrando la seconda equazione del sistema (10) rispetto alla variabile q si ha

$$F(q,P) = P\int\left(\frac{1}{q}+2q\right)dq = P(\ln q + q^2) + h(P), \tag{11}$$

dove $h(P)$ è una funzione $\mathcal{C}^1$ che dipende solo da P. Non rimane che ricavare $h(P)$. A tal fine, calcoliamo la derivata parziale di $F(q,P)$ rispetto a P:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(q,P)}{\partial P} &= \frac{\partial(P(\ln q + q^2) + h(P))}{\partial P}\\ &= \ln q + q^2 + h'(P).\end{aligned}$$

Sostituendo la formula precedente nella prima equazione del sistema (10) abbiamo l'identità

$$\ln q + q^2 + h'(P) = q^2 + \ln\left(\frac{q}{P}\right)$$

ovvero

$$\ln q + q^2 + h'(P) = q^2 + \ln q - \ln P,$$

da cui

$$h'(P) = -\ln P.$$

Per ottenere la funzione $h(P)$ non rimane che integrare rispetto a P la precedente equazione

$$h(P) = -\int \ln P d\mathrm{P} = P(1-\ln P) + c,$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria. Inserendo l'espressione di $h(P)$ nell'equazione (11) otteniamo finalmente la famiglia di funzioni generatrici di seconda specie:

$$\boxed{F(q,P) = P(\ln q + q^2 - \ln P + 1) + c, \quad c \in \mathbb{R}.}$$

Fonte: esami di meccanica analitica del professore Guido Gentile.

Meccanica razionale – Hamiltoniana #3

Esercizio 3 (★★★☆☆).

1. Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \dfrac{p}{q}\sqrt{\dfrac{2q}{p} - 1 - q^2}, \\ \\ P = \sqrt{\dfrac{2q}{p} - 1 - q^2}. \end{cases} \tag{1}$$

   Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.

2. Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$.

3. Si verifichi che la funzione generatrice $F = F(q, P)$ trovata al punto precedente soddisfa la condizione che $\dfrac{\partial^2 F}{\partial q \partial P}$ non si annulla nel dominio $\mathcal{D}$.

4. Si verifichi esplicitamente che la trasformazione del punto 1 conserva le parentesi di Poisson fondamentali.

5. Data l'hamiltoniana

$$H(q, p) = \frac{q}{p} - \frac{1}{2}(1 + q^2),$$

   si scriva l'hamiltoniana $\tilde{H}(Q, P)$ nelle variabili Q e P.
   e si risolvano le equazioni di Hamilton in queste nuove variabili.

6. Si scriva la soluzione delle equazioni di Hamilton in funzione delle coordinate originali (q, p).

Svolgimento. Punto 1. Il dominio della trasformazione è dato dal seguente insieme

$$\mathcal{D} = \left\{ (p, q) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{2q}{p} - 1 - q^2 > 0,\ (p, q) \neq (0, 0) \right\},$$

ovvero la regione (aperta) nel piano (p, q) delimitata dall'area sottesa al grafico della curva $p = \dfrac{2q}{1 + q^2}$ e l'asse delle ascisse $p = 0$.

Punto 2. Ricordiamo che una funzione generatrice $F(q,P)$ di seconda specie è una funzione che deve rispettare le seguenti condizioni

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial F}{\partial q}(q,P) \\ \\ Q = \dfrac{\partial F}{\partial P}(q,P). \end{cases} \tag{2}$$

Nel nostro caso ricordiamo che la trasformazione è data dal sistema (1).
Elevando ambo i membri della seconda equazione del sistema (1), si ottiene

$$P^2 = \frac{2q}{p} - 1 - q^2,$$

da cui

$$\frac{2q}{p} = P^2 + 1 + q^2,$$

e dunque

$$p = \frac{2q}{1 + P^2 + q^2}. \tag{3}$$

Sostituendo p (calcolata nella precedente equazione) nella prima equazione del sistema (2), si trova

$$\frac{\partial F}{\partial q}(q,P) = \frac{2q}{1 + P^2 + q^2}.$$

D'altra parte, confrontando la prima equazione del sistema (1) con la seconda del sistema (2), si ha

$$\frac{\partial F}{\partial P}(q,P) = \frac{p}{q}\sqrt{\frac{2q}{p} - 1 - q^2} = \frac{p}{q}P.$$

dove nell'ultimo passaggio che si è usata la definizione di P.
Abbiamo dunque ottenuto

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial q}(q,P) = \dfrac{2q}{1 + P^2 + q^2} \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial P}(q,P) = \dfrac{p}{q}\sqrt{\dfrac{2q}{p} - 1 - q^2} = \dfrac{p}{q}P. \end{cases} \tag{4}$$

Integrando ambo i membri della prima equazione del sistema (4) rispetto alla variabile q, si ottiene

$$F(q,P) = \int \frac{2q}{1 + P^2 + q^2}dq = \ln(1 + P^2 + q^2) + h(P), \tag{5}$$

dove $h(P)$ è una funzione $\mathcal{C}^1(\mathcal{D})$. Non rimane che ricavare $h(P)$. A tal fine, calcoliamo la derivata parziale di $F(q,P)$ rispetto a P:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(q,P)}{\partial P} &= \frac{\partial(\ln(1+P^2+q^2)+h(P))}{\partial P}\\ &= \frac{2P}{1+P^2+q^2}+h'(P).\end{aligned}$$

Sostituendo la formula precedente nella seconda equazione del sistema (4), si ottiene

$$\frac{2P}{1+P^2+q^2}+h'(P)=\frac{P}{q}p.$$

Mettendo a sistema la precedente equazione con l'equazione (3), si ha

$$\frac{2P}{1+P^2+q^2}+h'(P)=\frac{P}{q}\left(\frac{2q}{1+P^2+q^2}\right),$$

o anche

$$\frac{2P}{1+P^2+q^2}+h'(P)=\frac{2P}{1+P^2+q^2}$$

ovvero

$$h'(P)=0,$$

da cui

$$h(P)=k,$$

dove $k\in\mathbb{R}$ è una costante arbitraria. Inserendo l'espressione di $h(P)$ nell'equazione (5) otteniamo la famiglia di funzioni generatrici di seconda specie richiesta:

$$\boxed{F(q,P)=\ln(1+q^2+P^2)+k, \quad k\in\mathbb{R}.}$$

Punto 3. Siccome la funzione

$$\frac{\partial F}{\partial q}=\frac{2q}{1+q^2+P^2}$$

è derivabile rispetto alla variabile P è lecito calcolare

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q\partial P}=-\frac{4qP}{1+q^2+P^2}.$$

Osserviamo che la funzione $\partial^2F/\partial q\partial P$ si annulla per $qP=0$, ovvero se $P=0$ oppure se $q=0$.
Siccome la retta $q=0$ non appartiene al dominio $\mathcal{D}$ e $P\neq 0$ in quanto

$$P=\sqrt{\frac{2q}{p}-1-q^2}>0$$

in $\mathcal{D}$, abbiamo provato che $\dfrac{\partial^2 F}{\partial q\partial P}$ non si annulla mai in $\mathcal{D}$.

Punto 4. Dobbiamo verificare che la trasformazione (2) conserva le parentesi di Poisson fondamentali. Nel caso unidimensionale è sufficiente verificare la relazione

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1, \tag{6}$$

in quanto $\{Q, Q\}$ e $\{P, P\}$ sono identicamente nulle. Calcoliamo $\partial Q/\partial q$, $\partial P/\partial p$, $\partial Q/\partial p$ e $\partial P/\partial q$ separatamente.
Poiché[1]

$$Q = \frac{p}{q}P,$$

si ha

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = -\frac{p}{q^2}P + \frac{p}{q}\frac{\partial P}{\partial q}$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{P}{q} + \frac{p}{q}\frac{\partial P}{\partial p},$$

da cui

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} \\
&= \left(-\frac{pP}{q^2} + \frac{p}{q}\frac{\partial P}{\partial q}\right)\frac{\partial P}{\partial p} - \left(\frac{P}{q} + \frac{p}{q}\frac{\partial P}{\partial p}\right)\frac{\partial P}{\partial q} \\
&= -\frac{pP}{q^2}\frac{\partial P}{\partial p} + \frac{p}{q}\frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{P}{q}\frac{\partial P}{\partial q} - \frac{p}{q}\frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} \\
&= -\frac{pP}{q^2}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{P}{q}\frac{\partial P}{\partial q} \\
&= -\frac{P}{q}\left(\frac{p}{q}\frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial P}{\partial q}\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

Derivando, ambo i membri rispetto alla variabile p, della seconda equazione del sistema (1), si trova

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial p}\left(\sqrt{\frac{2q}{p} - 1 - q^2}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\frac{-\frac{2q}{p^2}}{\sqrt{\frac{2q}{p} - 1 - q^2}} = -\frac{q}{p^2}\frac{1}{P}.
\end{aligned} \tag{8}$$

[1] Ricordiamo che P dipende da q e da p.

Derivando, ambo i membri rispetto alla variabile q, della seconda equazione del sistema (1), si trova

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial q}\left(\sqrt{\frac{2q}{p} - 1 - q^2}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{2}{p} - 2q}{\sqrt{\dfrac{2q}{p} - 1 - q^2}} = -\frac{q}{p^2}\,\frac{1}{P} = \left(\frac{2}{p} - 2q\right)\frac{1}{2P}. \end{aligned} \tag{9}$$

Sfruttando le equazioni (8) e (9), l'equazione (7) diventa

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} \\ &= -\frac{P}{q}\left(-\frac{p}{q}\frac{q}{p^2}\frac{1}{P} + \left(\frac{2}{p} - 2q\right)\frac{1}{2P}\right) \\ &= -\frac{P}{q}\left(-\frac{1}{pP} + \frac{1}{pP} - \frac{q}{P}\right) \\ &= -\frac{P}{q}\left(-\frac{q}{P}\right) = 1, \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

Punto 5. Consideriamo l'hamiltoniana

$$H(q,p) = \frac{q}{p} - \frac{1}{2}(1 + q^2).$$

Elevando al quadrato ambo i membri della seconda equazione del sistema (1), si ha

$$P^2 = \frac{2q}{p} - 1 - q^2,$$

o anche

$$1 + q^2 = -P^2 + \frac{2q}{p},$$

da cui, l'Hamiltoniana H diventa

$$\begin{aligned} \tilde{H}(Q,P) &= \frac{q}{p} - \frac{1}{2}\left(-P^2 + 2\frac{q}{p}\right) \\ &= \frac{q}{p} + \frac{P^2}{2} - \frac{q}{p} = \frac{P^2}{2}, \end{aligned} \tag{10}$$

ovvero abbiamo ottenuto l'hamiltoniana nelle coordinate Q e P.
Calcoliamo ora le equazioni di Hamilton associate alle coordinate Q e P, ovvero

$$\begin{cases} \dot{Q} = \dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial P} \\ \\ \dot{P} = -\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial Q}. \end{cases}$$

Dalla (10) abbiamo

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = P$$

e

$$-\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0,$$

da cui il precedente sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{Q} = P \\ \\ \dot{P} = 0. \end{cases}$$

Integrando ambo i membri delle due equazioni delle precedente sistema rispetto al tempo, si ottiene

$$\begin{cases} Q(t) = Pt + Q(0) \\ \\ P(t) = P(0), \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} Q(t) = P(0)t + Q(0) \\ \\ P(t) = P(0). \end{cases} \tag{11}$$

Punto 6. È utile esprimere le variabili p e q in delle variabili P e Q.
Dal sistema (1), si ottiene

$$Q = \frac{p}{q}\sqrt{\frac{2q}{p} - 1 - q^2} = \frac{p}{q}P,$$

da cui abbiamo

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{p}. \tag{12}$$

Poi, elevando al quadrato, ambo i membri della seconda equazione del sistema (1), si ottiene

$$P^2 = \frac{2q}{p} - 1 - q^2,$$

da cui, sfruttando l'equazione (12), si ha

$$P^2 = \frac{2P}{Q} - 1 - q^2,$$

oppure

$$P^2 - \frac{2P}{Q} + 1 = q^2,$$

per cui

$$q = \pm\sqrt{P^2 - \frac{2P}{Q} + 1}.$$

D'altra parte, usando l'equazione (12) e dalla formula appena ottenuta per q, si ha

$$p = \frac{Q}{P}q = \pm\frac{Q}{P}\sqrt{P^2 - \frac{2P}{Q} + 1}.$$

Abbiamo quindi ottenuto

$$\begin{cases} q = \pm\sqrt{P^2 - \frac{2P}{Q} + 1} \\ p = \pm\frac{Q}{P}\sqrt{P^2 - \frac{2P}{Q} + 1}. \end{cases} \tag{13}$$

Infine, inserendo le equazioni del sistema (11) in (13) si ottiene

$$\begin{cases} q = \pm\sqrt{P^2(0) - \frac{2P(0)}{P(0)t + Q(0)} + 1} \\ p = \pm\frac{P(0)t + Q(0)}{P(0)}\sqrt{P^2(0) - \frac{2P(0)}{P(0)t + Q(0)} + 1}. \end{cases}$$

Si osservi che, chiaramente, il precedente sistema per essere ben definito deve valere

$$\begin{cases} P^2(0) - \frac{2P(0)}{P(0)t + Q(0)} + 1 > 0 \\ P(0) \neq 0. \end{cases}$$

Fonte: esami di meccanica analitica del professore Guido Gentile.

Meccanica razionale – Hamiltoniana #4

Esercizio 4 (★★★☆☆). Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = -p\sqrt{\dfrac{1-qp}{1+qp}} \\[2ex] P = q\sqrt{\dfrac{1+qp}{1-qp}}, \end{cases} \tag{1}$$

con $q, p \geq 0$.

1. Si calcolino le derivate parziali di Q e P rispetto a q e p e si dimostri che la trasformazione è canonica verificando che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali.

2. Si dimostri che $qp = -QP$ e si utilizzi tale risultato per ricavare q in termini di Q e P a partire dall'espressione di P in termini di q e p. Esplicitando anche p in funzione di Q e P, si calcoli la trasformazione inversa della trasformazione data.

3. Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$.

4. Si consideri il sistema hamiltoniano descritto dall'hamiltoniana

$$H(q,p) = \frac{q^2\,(1+qp)}{1-qp}.$$

   Si calcoli l'hamiltoniana nelle variabili (Q, P).

5. Si usi il risultato del punto precedente per determinare esplicitamente la soluzione $(q(t), p(t))$ delle equazioni di Hamilton con dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 0)$.

Svolgimento. **Punto 1.** Per prima cosa osserviamo che il dominio della trasformazione è dato dalle (p, q) che soddisfano il seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \dfrac{1-qp}{1+qp} > 0, \\[2ex] \dfrac{1+qp}{1-qp} > 0. \end{cases}$$

Per calcolare le derivate parziali di P e Q è conveniente introdurre la seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \qquad x \in (-1, 1).$$

Osserviamo che, per ogni $x \in (-1,1)$,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1-x-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{2}{(1-x^2)} \\
&= \frac{1}{f(x)(1-x)^2}.
\end{aligned}
$$

Ora, è possibile riscrivere Q e P in funzione di f, cioè

$$
Q = -p\frac{1}{f(qp)} \quad \text{e} \quad P = qf(qp).
$$

Calcoliamo le derivate parziali di P rispetto a q e p, cioè

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial q} &= f(qp) + qpf'(qp) \\
&= f(qp) + qp\frac{1}{f(qp)(1-qp)^2}
\end{aligned}
$$

e

$$
\frac{\partial P}{\partial p} = qf'(qp)\,q = q^2 f(qp).
$$

Calcoliamo le derivate parziali di Q rispetto a q e p, cioè

$$
\frac{\partial Q}{\partial q} = -p(-1)(f(qp))^{-2}p = \frac{p^2}{f(qp)^2},
$$

e

$$
\frac{\partial Q}{\partial p} = -\frac{f(qp) - qpf'(qp)}{f^2(qp)}.
$$

Per verificare che la trasformazione (1) conserva le parentesi di Poisson fondamentali, dobbiamo controllare che esse soddisfino la condizione

$$
\{Q,P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1. \tag{2}
$$

Si osservi che non abbiamo verificato i casi $\{Q,Q\} = 0$ e $\{P,P\} = 0$, poiché molto semplici. Dal calcolo delle derivate parziali appena fatto, si ha

$$
\begin{aligned}
\{Q,P\} &= \frac{p^2}{f(qp)^2}q^2 f'(qp) \\
&\quad + \frac{f(qp) - qpf'(qp)}{f(qp)^2}\left(f(qp) + qpf'(qp)\right) \\
&= \frac{p^2q^2f'(qp)}{f(qp)^2} + \frac{f(qp)^2 - q^2p^2(f'(qp))^2}{f(qp)^2} \\
&= \frac{f(qp)^2}{f(qp)^2} = 1,
\end{aligned}
$$

come volevasi dimostrare.

Punto 2. Mostriamo che $QP = -qp$. Sfruttando la definizione di Q e P data in (1) si ha

$$QP = -pq\sqrt{\frac{1+qp}{1-qp}}\sqrt{\frac{1-qp}{1+qp}} = -qp$$

che è esattamente quello che volevamo ottenere.
Sfruttando $QP = -qp$ è possibile riscrivere Q come segue

$$Q = -p\sqrt{\frac{1-qp}{1+qp}} = -p\sqrt{\frac{1+QP}{1-QP}},$$

ovvero

$$p = -Q\sqrt{\frac{1-QP}{1+QP}},$$

cioè abbiamo espresso p in funzioni delle variabili Q e P, come richiesto.
D'altra parte, si ha

$$P = q\sqrt{\frac{1+qp}{1-qp}} = q\sqrt{\frac{1-QP}{1+QP}},$$

o anche

$$q = P\sqrt{\frac{1+QP}{1-QP}},$$

cioè abbiamo ottenuto q in funzioni delle variabili P e Q.
Abbiamo dunque trovato la trasformazione inversa cercata, data da

$$\boxed{\begin{cases} q = P\sqrt{\dfrac{1+QP}{1-QP}} \\ \\ p = -Q\sqrt{\dfrac{1-QP}{1+QP}}. \end{cases}}$$

Punto 3. Ricordiamo che una funzione generatrice $F(q, P)$ di seconda specie è una funzione che deve rispettare le seguenti condizioni

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial F}{\partial q}(q, P) \\ \\ Q = \dfrac{\partial F}{\partial P}(q, P). \end{cases} \tag{3}$$

Nel nostro caso ricordiamo che la trasformazione è data dal sistema (1). Dalla seconda equazione del sistema (1) è possibile esprimere p in funzione di q e

P. Dunque, elevando al quadrato ambo i membri della seconda equazione del sistema (1), si ottiene

$$\frac{P^2}{q^2} = \frac{1+qp}{1-qp} \quad \Leftrightarrow \quad P^2(1-qp) = q^2(1+qp),$$

da cui

$$P^2 - qpP^2 - q^2 - q^3p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(-qP^2 - q^3) = -P^2 + q^2,$$

e dunque

$$p = \frac{-q^2 + P^2}{q(P^2 + q^2)}.$$

Sostituendo p (ottenuta nella precedente equazione) nella prima equazione del sistema (3), si ottiene

$$\frac{\partial F}{\partial q}(q, P) = \frac{-q^2 + P^2}{q(P^2 + q^2)}.$$

Sostituendo Q (definita nella prima equazione della trasformazione (1)) nella seconda equazione del sistema (3), si ottiene

$$\frac{\partial F}{\partial P}(q, P) = -p\sqrt{\frac{1-qp}{1+qp}}.$$

Abbiamo dunque ottenuto

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial P}(q, P) = -p\sqrt{\dfrac{1-qp}{1+qp}}, \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial q}(q, P) = \dfrac{-q^2 + P^2}{q(P^2 + q^2)}. \end{cases} \tag{4}$$

Integrando ambo i membri della seconda equazione del sistema (4) rispetto alla variabile q, si ha

$$F(q, P) = \int \frac{-q^2 + P^2}{q(P^2 + q^2)} dq = \int \frac{1 - \left(\frac{q}{P}\right)^2}{q\left(1 - \left(\frac{q}{P}\right)^2\right)} dq. \tag{5}$$

Ponendo $\dfrac{q}{P} = t \geq 0$, con t vista come funzione della sola q, e quindi $dq = Pdt$, l'ultimo integrale in (5) diventa

$$\int \frac{1 - t^2}{Pt(1 + t^2)} Pdt = \int \frac{1 - t^2}{t(1 + t^2)} dt.$$

Per calcolare l'ultimo integrale in t, usiamo il metodo della scomposizione in fratti semplici: cerchiamo $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $t \geq 0$,

$$\frac{1 - t^2}{t(1 + t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{1 + t^2} = \frac{A(1 + t^2) + (Bt + C)t}{t(1 + t^2)},$$

ovvero tali che, per ogni $t \geq 0$,

$$1 - t^2 = A(1+t^2) + (Bt + C)t.$$

Per $t = 0$ si ha subito $A = 1$. Sostituendo $A = 1$ nella precedente relazione, si ottiene

$$1 - t^2 = 1 + t^2 + Bt^2 + Ct \quad \Leftrightarrow \quad t^2(B+2) + Ct = 0,$$

che implica subito la soluzione

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \\ C = 0. \end{cases}$$

In definitiva si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{1-t^2}{t(1+t^2)} dt &= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{2t}{1+t^2} \right) dt \\ &= \ln t - \ln(1+t^2) + h(P) \\ &= \ln \left(\frac{t}{1+t^2} \right) + h(P), \end{aligned}$$

dove $h(P)$ è una funzione arbitraria che può dipendere da P. Usando quanto ottenuto in (5) e ricordando che $t = \dfrac{q}{P}$, si ha

$$\begin{aligned} F(q,P) &= \ln \left(\frac{\frac{q}{P}}{1 + \left(\frac{q}{P}\right)^2} \right) + h(P) \\ &= \ln \left(\frac{q}{P} \right) - \ln(P^2 + q^2) + \ln P + h(P) \\ &= \ln q - \ln P - \ln(P^2+q^2) + \ln P + h(P) \\ &= \ln \left(\frac{q}{P^2+q^2} \right) + h(P), \end{aligned}$$

dove $h(P)$ è una funzione che può dipendere solo da P. Abbiamo quindi trovato un'espressione per F data da

$$F(q,P) = \ln \left(\frac{q}{P^2+q^2} \right) + h(P). \tag{6}$$

Non rimane che ricavare $h(P)$. A tal fine, calcoliamo la derivata parziale di $F(q,P)$ rispetto a P:

$$\frac{\partial F(q,P)}{\partial P} = \frac{\partial \left(\ln \left(\frac{q}{P^2+q^2} \right) + h(P) \right)}{\partial P}$$

$$= -\frac{2P}{P^2+q^2} + h'(P).$$

Sostituendo la formula precedente nella prima equazione del sistema (3) abbiamo l'identità

$$-\frac{2P}{P^2+q^2} + h'(P) = Q. \tag{7}$$

Ricordiamo ora che nei punti precedenti abbiamo mostrato che $qp = -QP$ e che

$$Q = -p\sqrt{\frac{1+QP}{1-QP}} = \frac{QP}{q}\sqrt{\frac{1+QP}{1-QP}}.$$

Dalla precedente equazione, ponendo $Q \neq 0$, ricaviamo

$$1 = \frac{P}{q}\sqrt{\frac{1+QP}{1-QP}} \quad \Rightarrow \quad q^2(1-QP) = P^2(1+QP) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad q^2 - P^2 = q^2QP + P^2QP,$$

da cui

$$q^2 - P^2 = QP(q^2+P^2),$$

quindi

$$Q = \frac{q^2-P^2}{P(q^2+P^2)}.$$

Sostituendo la precedente formula per Q in (7), si ha

$$-\frac{2P}{P^2+q^2} + h'(P) = \frac{q^2-P^2}{P(q^2+P^2)},$$

ovvero

$$h'(P) = \frac{q^2+P^2}{P(q^2+P^2)} = \frac{1}{P},$$

da cui, integrando rispetto a P, si trova

$$h(P) = \ln P + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

dove C è una costante arbitraria. Inserendo l'espressione di $h(P)$ nell'equazione (6) otteniamo finalmente la famiglia di funzioni generatrici di seconda specie richiesta:

$$\boxed{F(q,P) = \ln\left(\frac{qP}{q^2+P^2}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

Punto 4. Consideriamo l'hamiltoniana

$$H(q,p) = \frac{q^2(1+qp)}{1-qp}.$$

Usando la seconda equazione del sistema (1). otteniamo l'hamiltoniana nelle coordinate (Q,P):

$$\tilde{H}(Q,P) = q^2\left(\frac{P^2}{q^2}\right) = P^2. \quad (8)$$

Punto 5. Calcoliamo ora le equazioni di Hamilton associate alle coordinate Q e P, ovvero

$$\begin{cases} \dot{Q} = \dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial P} \\ \dot{P} = -\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial Q}. \end{cases}$$

Dalla (8) abbiamo

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = 2P,$$
$$-\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0$$

da cui, integrando rispetto alla variabile t, otteniamo

$$\begin{cases} Q(t) = 2Pt + Q(0) \\ P(t) = P(0) \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} Q(t) = 2P(0)t + Q(0) \\ P(t) = P(0). \end{cases} \quad (9)$$

Dall'equazione (8) abbiamo

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = 2P = \dot{Q} \quad (10)$$

e

$$-\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0 = \dot{P}. \quad (11)$$

Integrando, ambo i membri della (10) rispetto al tempo, si ottiene

$$Q(t) = 2\int P\,dt + \mathrm{c}_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Analogamente a prima, integrando, ambo i membri della (11) rispetto al tempo, si ottiene

$$P(t) = c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali si trova $c_2 = P(0)$, da cui, abbiamo

$$Q(t) = 2\int P(0)\,dt + \mathrm{c}_1 = 2P(0)\,t + \mathrm{c}_1.$$

Imponendo le condizioni iniziali si trova $c_1 = Q(0)$ e quindi

$$Q(t) = 2\int P(0)\,dt + Q(0).$$

Riassumendo, si ha

$$\begin{cases} Q(t) = 2P(0)t + Q(0) \\ \\ P(t) = P(0). \end{cases} \tag{12}$$

Infine, dal sistema (1) e dalle condizioni iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 0)$ si ha $Q(0) = 0$ e $P(0) = 1$, da cui

$$\begin{cases} Q(t) = 2t \\ \\ P(t) = 1. \end{cases} \tag{13}$$

Possiamo infine calcolare $p(t)$ e $q(t)$ usando le formule ottenute al punto 2. Infatti

$$q = P\sqrt{\frac{1+QP}{1-QP}} = \sqrt{\frac{1+2t}{1-2t}}$$

e

$$p = -Q\sqrt{\frac{1-QP}{1+QP}} = -2t\sqrt{\frac{1-2t}{1+2t}}.$$

Osserviamo che il dominio di q e p è dato da $t \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Fonte: esami di meccanica analitica del professore Guido Gentile.

Meccanica razionale – Hamiltoniana #5

Esercizio 5 (★★★☆☆) Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \dfrac{(1-qp)^2}{q^2p}, \\ P = \dfrac{q^2p}{1-qp}. \end{cases} \tag{1}$$

1. Si dimostri che la trasformazione è canonica verificando che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali.

2. Si dimostri che $q^2p = Qp^2$ e si utilizzi tale risultato e l'espressione di P in termini di q e p per esprimere q in termini di Q e P.

3. Esplicitando anche p in funzione di Q e P, si calcoli la trasformazione inversa della trasformazione data.

4. Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$.

5. Si consideri il sistema hamiltoniano descritto dall'hamiltoniana

$$H(q, p) = q^2p\frac{1}{1-qp}. \tag{2}$$

Si usi il fatto che la trasformazione del punto 1 è canonica per determinare esplicitamente la soluzione $(q(t), p(t))$ delle equazioni di Hamilton con dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 2)$.

Svolgimento. Punto 1. Per prima cosa osserviamo che il dominio della trasformazione è dato da

$$\mathcal{D} = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 \mid q \neq 0, p \neq 0, qp \neq 1\}.$$

Per verificare che la trasformazione conserva le parentesi di Poisson fondamentali, dobbiamo controllare che esse soddisfino

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1, \tag{3}$$

essendo i casi $\{Q, Q\} = 0$ e $\{P, P\} = 0$ ovvi in dimensione uno.
Per calcolare le derivate parziali di P e Q rispetto a q e p è utile introdurre la seguente funzione

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1.$$

Osserviamo che, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Riscriviamo la trasformazione (1) come segue

$$Q = \left(\frac{1 - qp}{qp}\right)^2 p$$

e

$$P = \left(\frac{qp}{1 - qp}\right) q.$$

Sfruttando la funzione f è possibile riscrivere le due precedenti equazioni come di seguito:

$$Q = f^2(qp)p, \qquad P = \frac{q}{f(qp)}, \tag{4}$$

da cui otteniamo le derivate parziali di P

$$\frac{\partial P}{\partial q} = \frac{1}{f(qp)} - qp\frac{f'(qp)}{f(qp)^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} = -q^2\frac{f'(qp)}{f(qp)^2}$$

e di Q

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = -\frac{2}{q^2}f(qp),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = f^2(qp) + 2qpf(qp)f'(qp).$$

Dal calcolo delle derivate parziali appena fatto, si ha

$$
\begin{aligned}
\{Q, P\} &= \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = \\
&= \left(-\frac{2}{q^2} f(qp)\right)\left(-q^2\frac{f'(qp)}{f^2(qp)}\right) + \\
&\quad - \left(f^2(qp) + 2qpf(qp)f'(qp)\right)\left(\frac{1}{f(qp)} - qp\frac{f'(qp)}{f^2(qp)}\right) = \\
&= 2\frac{f'(qp)}{f(qp)} - f(qp) + qpf'(qp) + \\
&\quad - 2qpf'(qp) + 2p^2q^2\frac{f'(qp)^2}{f(qp)} = \\
&= -f(qp) - qpf'(qp).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Mostriamo che l'ultima espressione equivale a uno. Osserviamo che

$$
f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}(1 + f(x)),
$$

da cui

$$
f'(qp) = -\frac{1}{qp}(1 + f(qp)).
$$

Sfruttando la precedente equazione è possibile riscrivere l'equazione (5) come segue

$$
\begin{aligned}
\{Q, P\} &= -f(qp) - qpf'(qp) \\
&= -f(qp) + qp\frac{1}{qp}(1 + f(qp)) = 1
\end{aligned}
$$

che è esattamente quello che volevamo ottenere, cioè abbiamo dimostrato che la trasformazione è canonica.

Punto 2. Mostriamo che $QP^2 = q^2p$. Possiamo riscrivere (1) come di seguito

$$
\begin{cases}
Q = \dfrac{(1 - qp)^2}{q^2p}, \\[2ex]
P^2 = \dfrac{q^4p^2}{(1 - qp)^2}.
\end{cases}
$$

Facendo il prodotto ambo i membri delle due precedenti equazioni si ottiene

$$
QP^2 = \frac{(1 - qp)^2}{q^2p}\,\frac{q^4p^2}{(1 - qp)^2} = q^2p,
$$

ovvero
$$QP^2 = q^2 p.$$
Esplicitiamo ora la variabile q in funzione di Q e P.
Dalla seconda equazione del sistema (1), sfruttando la precedente equazione, si trova
$$P = \frac{q^2 p}{1 - qp} = \frac{QP^2}{1 - \dfrac{QP^2}{q}},$$
che implica
$$1 - \frac{QP^2}{q} = QP \iff -\frac{QP^2}{q} = -1 + QP,$$
ovvero
$$\frac{q}{QP^2} = \frac{1}{1 - QP},$$
infine
$$\boxed{q = \frac{QP^2}{1 - QP}.}$$
che è quanto richiesto.

Punto 3. Esplicitiamo la variabile p in funzione di Q e P. Usando la seconda equazione del sistema (1), abbiamo
$$P - Pqp = q^2 p \iff P = qp(P + q), \tag{6}$$
conseguentemente, usando il risultato pervenuto al precedente punto, si ha
$$\begin{aligned} p = \frac{P}{q(P+q)} &= \frac{P}{\left(\dfrac{QP^2}{1-QP}\right)\left(P + \dfrac{QP^2}{1-QP}\right)} \\ &= P\left(\frac{1-QP}{QP^2}\right)\left(\frac{1-QP}{1-QP+QP}\right)\frac{1}{P} \\ &= \frac{(1-QP)^2}{QP^2}. \end{aligned}$$
Utilizzando l'equazione pervenuta al punto 2 e la precedente equazione otteniamo la trasformazione inversa richiesta, data da
$$\boxed{\begin{cases} q = \dfrac{QP^2}{1-QP} \\ p = \dfrac{(1-QP)^2}{QP^2}. \end{cases} \qquad (7)}$$

Punto 4. Ricordiamo che una funzione generatrice $F(q,P)$ di seconda specie è una funzione che deve rispettare le seguenti condizioni

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial F}{\partial q}(q,P) \\ \\ Q = \dfrac{\partial F}{\partial P}(q,P). \end{cases} \tag{8}$$

Nel nostro caso ricordiamo che la trasformazione è data dal sistema (1).
Possiamo sfruttare l'equazione (6). Osserviamo che deve essere $P + q \neq 0$. Infatti, se fosse $P + q = 0$, l'equazione (6) darebbe $P = 0$ e il risultato del punto 2 darebbe $q = 0$, che non è ammesso. Quindi dall'equazione (6) si ottiene immediatamente

$$p = \frac{P}{q(P+q)}.$$

Quindi, inserendo quanto ottenuto nella prima equazione del sistema (8), si ha

$$\frac{\partial F}{\partial q}(q,P) = \frac{P}{q(P+q)}.$$

D'altra parte, dalla prima equazione del sistema (1) e dalla seconda del sistema (8), si ha

$$\frac{\partial F}{\partial P}(q,P) = \frac{(1-qp)^2}{q^2 p}.$$

Abbiamo dunque ottenuto

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial F}{\partial q}(q,P) = \dfrac{P}{q(P+q)} \\ \\ Q = \dfrac{\partial F}{\partial P}(q,P) = \dfrac{(1-qp)^2}{q^2 p}. \end{cases} \tag{9}$$

Integrando la prima equazione del sistema (9) rispetto alla variabile q si ha

$$\begin{aligned} F(q,P) &= \int \frac{P}{q(P+q)} dq = \int \frac{P+q-q}{q(P+q)} dq \\ &= \int \frac{1}{q} dq - \int \frac{1}{(P+q)} dq \\ &= \ln\left|\frac{q}{P+q}\right| + h(P), \end{aligned} \tag{10}$$

dove $h(P)$ è una funzione che varia in modo $\mathcal{C}^1$ in $\mathcal{D}$. Abbiamo quindi trovato un'espressione per F data da

$$F(q,P) = \ln\left|\frac{q}{P+q}\right| + h(P). \tag{11}$$

Non rimane che ricavare $h(P)$. Supponiamo che sia $\frac{q}{P+q}$, l'altro caso si fa in modo analogo. Ricordando il risultato pervenuto all'equazione (4), si ottiene

$$Q = f^2(qp)p = \frac{q^2 p}{P^2} = \frac{q}{P}\frac{1}{q+P}, \tag{12}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato $p = \frac{P}{q(q+P)}$.

Ora, da (11), calcoliamo la derivata parziale di $F(q,P)$ rispetto a P:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(q,P)}{\partial P} &= \frac{\partial\left(\ln\left(\frac{q}{P+q}\right)+h(P)\right)}{\partial P} = \\ &= -\frac{1}{\frac{q}{P+q}}\frac{q}{(P+q)^2} + \frac{dh(P)}{dP} = \\ &= -\frac{1}{P+q} + \frac{dh(P)}{dP}.\end{aligned}$$

Sostituendo la formula precedente nella seconda equazione del sistema (9), e usando (12), abbiamo l'identità

$$-\frac{1}{P+q} + \frac{dh(P)}{dP} = \frac{q}{P}\frac{1}{q+P}$$

ovvero

$$\frac{dh(P)}{dP} = \left(\frac{P+q}{P}\right)\left(\frac{1}{P+q}\right) = \frac{1}{P},$$

da cui, integrando, ambo i membri la precedente equazione rispetto alla variabile P, si trova

$$h(P) = \ln|P| + C,$$

dove $C \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria. Inserendo l'espressione di $h(P)$ nell'equazione (11) otteniamo finalmente la famiglia di funzioni generatrici di seconda specie richiesta:

$$\boxed{F(q,P) = \ln\left|\frac{qP}{q+P}\right| + C, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

Punto 5. Usando la seconda equazione del sistema (1) e l'equazione (2) otteniamo l'hamiltoniana nelle coordinate (Q,P):

$$\tilde{H}(Q,P) = P. \tag{13}$$

Calcoliamo ora le equazioni di Hamilton associate alle coordinate Q e P, ovvero

$$\begin{cases} \dot{Q} = \dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial P} \\ \\ \dot{P} = -\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial Q}. \end{cases}$$

Sfruttando l'equazione (13) il precedente sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{Q} = \dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = 1 \\ \\ \dot{P} = -\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0, \end{cases}$$

da cui integrando ambo i membri delle precedenti equazioni rispetto al tempo, otteniamo

$$\begin{cases} Q(t) = t + Q(0) \\ \\ P(t) = P(0). \end{cases}$$

Infine, dal sistema (1) e dalle condizioni iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 2)$ si ha

$$\begin{cases} \qquad Q(0) = \dfrac{(1 - q(0)p(0))^2}{q(0)^2 p(0)} = \dfrac{(1-2)^2}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \\ \qquad P(0) = \dfrac{(q(0))^2 p(0)}{1 - q(0)p(0)} = \dfrac{2}{1-2} = -2, \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} Q(t) = t + \dfrac{1}{2} \\ \\ P(t) = -2. \end{cases} \tag{14}$$

Possiamo infine calcolare $p(t)$ e $q(t)$ usando le formule ottenute al punto 3 in (7). Infatti

$$q = \frac{QP^2}{1 - QP} = \frac{4\left(t + \dfrac{1}{2}\right)}{1 + 2\left(t + \dfrac{1}{2}\right)} = \frac{4t + 2}{1 + 2t + 1} = \frac{4t + 2}{2\,(t + 1)} = \frac{2t + 1}{t + 1}$$

e

$$p = \frac{(1 - QP)^2}{QP^2} = \frac{\left(1 + 2\left(t + \dfrac{1}{2}\right)\right)^2}{4\left(t + \dfrac{1}{2}\right)} = \frac{(1 + 2t + 1)^2}{4t + 2} = \frac{4\,(t+1)^2}{2\,(2t + 1)} = \frac{2(t+1)^2}{1 + 2t}.$$

Osserviamo che il dominio di q e p è dato rispettivamente da $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$.
Si conclude che

$$\boxed{q(t) = \frac{2t+1}{t+1}}$$

e

$$\boxed{p(t) = \frac{2(t+1)^2}{2t+1}.}$$