# FM210 - Meccanica Analitica
## Anno Accademico 2023/2024

Prima prova di esonero (16-04-2024)

<u>Esercizio 1.</u> [6+2] Si consideri in $\mathbb{R}^2$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Si verifichi che $A^2 = -2A$ e si usi il risultato per dimostrare che $A^k = (-2)^{k-1}A$ per $k \geq 1$.
2. Si usi il risultato al punto 1 per calcolare $e^{At}$, per $t \in \mathbb{R}$, e quindi risolvere il sistema di equazioni lineari
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = x - y, \end{cases}$$
in corrispondenza di un dato iniziale arbitrario $(\bar{x}, \bar{y})$ in $\mathbb{R}^2$.
3. Si dimostri che la retta $y = -x$ è invariante, i.e. che se $\bar{y} = -\bar{x}$ allora $y(t) = -x(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e si studi l'andamento asintotico delle traiettorie i cui iniziali si trovino su tale retta.
4. [Si calcolino autovalori e autovettori di A, e si usi il risultato per ricalcolare l'esponenziale di $At$, per $t \in \mathbb{R}$.]

<u>Esercizio 2.</u> [6+1] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\left(3x^2 - 2x^4\right).$$

1. Si studi di il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
4. Si dimostri che esistono traiettorie illimitate con energia $E = 0$.
5. Si discuta se le traiettorie del punto 4 divergono in un tempo finito o infinito.
6. [Si calcoli il periodo delle traiettorie vicino a un punto di equilibrio stabile nell'approssimazione delle piccole oscillazioni.]

<u>Esercizio 3.</u> [5+3] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = x^2 + \alpha \log\left|\frac{1+x^2}{1-x^2}\right|.$$

1. Per $\alpha = 1$, si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Per $\alpha = 1$, si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Per $\alpha = 1$, si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
4. Per $\alpha = 1$, si dimostri che ogni traiettoria che non sia un punto di equilibrio è periodica.
5. [Si discuta come cambia lo scenario al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.]

<u>ESERCIZIO 4.</u> [6+1] Un punto materiale di massa $\mu$ è soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho^2+\rho}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sia $L$ il modulo del momento angolare, e si assuma che sia $L > 0$. Al variare del parametro $\alpha$, si risponda alle seguenti domande.

1. Si scrivano le equazioni del moto per la variabile $\rho$ e per la variabile $\theta$.
2. Si studi il grafico dell'energia potenziale efficace.
3. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato all'equazione per la variabile $\rho$ e se ne discuta la stabilità.
4. Si studino qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot\rho)$.
5. Si determinino le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot\rho)$, e si discutano le condizioni sotto le quali il moto complessivo del sistema è periodico.
6. [Si discuta come cambia lo scenario nel caso in cui si abbia $L = 0$.]

<u>ESERCIZIO 5.</u> [7+3] Dato un un sistema di riferimento fisso $\kappa = Oxyz$, si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ la cui l'origine $O'$ scorre nel piano $xy$ lungo il profilo iperbolico

$$y = \sqrt{1+x^2},$$

in modo tale che

- la componente di $O'$ lungo l'asse $x$ varia con legge oraria $x_{O'} = t$,
- l'asse $\xi$ si mantiene tangente al profilo, nel verso delle $x$ positive,
- l'asse $\zeta$ rimane parallelo all'asse $z$.

Al tempo $t = 0$, un punto materiale $P$ di massa $m$ inizia a muoversi lungo l'asse $\xi$ con velocità costante $-v_0$.

1. Si scriva la trasformazione rigida $D : K \to \kappa$ come composizione di una traslazione $C$ con una rotazione $B$.
2. Si determini il moto $\boldsymbol{q}(t)$ del punto $P$ nel sistema di riferimento fisso $\kappa$.
3. Si determino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento del punto $P$.
4. Si calcoli il valore della forza di Coriolis e della forza centrifuga che agiscono sul punto $P$ nel sistema di riferimento mobile $K$.
5. Si discuta per quali valori di $v_0$ il punto $P$, per $t > 0$,
   - si mantiene sempre nel sempiano $x > 0$,
   - si mantiene sempre nel sempiano $x < 0$.
6. [Con riferimento al punto 5, si discuta per quali valori di $v_0$ il punto $P$ si mantiene inizialmente nel semipiano $x < 0$ per poi entrare nel semipiano $x > 0$ in un tempo finito $t_0$, si calcoli esplicitamente il valore di $t_0$ e si determini il punto lungo l'asse $y$ in cui avviene il passaggio da un semipiano all'altro.]