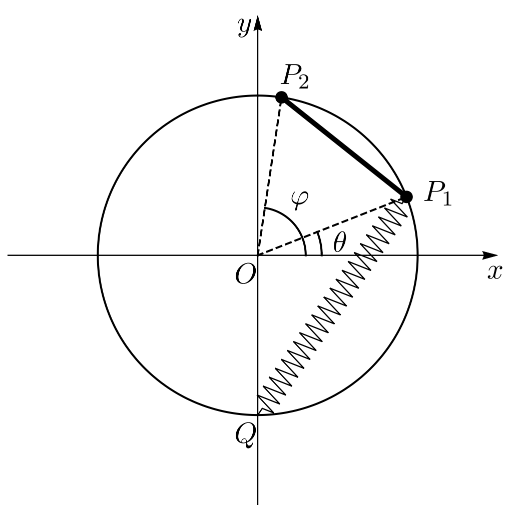
FM210 - Meccanica Analitica
Anno Accademico 2023/2024

Seconda prova di esonero (05-06-2024)

<u>Esercizio 1.</u> [6+2] Un disco omogeneo di massa m e raggio r rotola senza strisciare su una guida circolare di raggio $2r$, posta in un piano verticale. Il centro del disco è collegato tramite due molle di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla al punto più in alto della guida e a un punto P di massa m libero di scorrere lungo l'asse di simmetria verticale della guida. Sul sistema agisce la forza gravità (sia g l'accelerazione di gravità).

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
3. [Si risponda alle stesse domande nel caso in cui il punto P sia fissato al punto più in basso della guida.]

<u>Esercizio 2.</u> [6+2] Due punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa m, possono scorrere lungo una guida circolare di raggio $r = 1$, posta in un piano verticale, che identifichiamo con il piano xy. Un'asta di lunghezza $\ell = 1$ e massa $M = 0$ collega i due punti P_1 e P_2, e una molla di lunghezza trascurabile e costante elastica k collega il punto P_1 al punto più in basso della guida. Sul sistema agisce inoltre la forza forza gravità, diretta nel verso decrescente dell'asse y (sia g l'accelerazione di gravità).



1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando come coordinata lagrangiana l'angolo θ che il segmento OP_1 forma con l'asse x ed esprimendo l'angolo φ che il segmento OP_2 forma con l'asse x in termini di θ (cfr. la figura).
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
3. [Si risponda alle stesse domande nel caso in cui la massa M dell'asta sia non nulla.]

Esercizio 3. [6+2] Quattro punti materiali P_1, P_2, P_3 e P_4, tutti di massa m, si muovono nel piano xy, nel modo seguente: P_1 può scorrere lungo la retta $y = 1$, P_2 può scorrere lungo la retta $y = x$, P_3 può scorrere lungo la retta $y = -x$, e P_4 può scorrere lungo la retta $y = -1$. Sui quattro punti agisce la forza di gravità, diretta nel verso decrescente dell'asse y (sia g l'accelerazione di gravità). Inoltre, tre molle, tutte di costante elastica k e lunghezza trascurabile, collegano P_1 a P_2, P_2 a P_3 e P_3 a P_4.

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
3. Si calcoli la reazione vincolare che agisce sul punto P_1.
4. [Si risponda alle prime due domande nel caso in cui il piano ruoti intorno all'asse y con velocità angolare costante ω.]

Esercizio 4. [6+2+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \dfrac{q^2+1}{2q}\sqrt{4q^2+p^2(q^2+1)^2}, \\ P = \dfrac{p}{\sqrt{4q^2+p^2(q^2+1)^2}}, \end{cases}$$

1. Se ne determini il dominio $\mathcal{D}$.
2. Si dimostri che la trasformazione è canonica trovandone una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$.
3. Data la hamiltoniana
$$\mathcal{H}(q, \dot{q}) = \frac{(q^2+1)^4 p^2}{2q^2} + 2(q^2+1)^2,$$
si determini l'espressione dell'hamiltoniana nelle variabili (Q, P).
4. Si determini nel sistema di coordinate (Q, P) la soluzione con dato iniziale $q(0) = p(0) = 1$.
5. [Si scriva la soluzione del punto precedente nel sistema di coordinate originale.]
6. [Si verifichi esplicitamente che la trasformazione di coordinate conserva le parentesi di Poisson fondamentali].

Esercizio 5. [6+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$Q_1 = \frac{p_2}{3q_2^2+1}, \quad Q_2 = \frac{p_1}{3q_1^2+1}, \quad P_1 = \frac{p_1}{3q_1^2+1} - q_2 - q_2^3, \quad P_2 = \frac{p_2}{3q_2^2+1} - q_1 - q_1^3.$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
2. Si dimostri che la trasformazione è canonica trovandone una funzione generatrice di seconda specie $F(q_1, q_2, P_1, P_2)$.
3. Si verifichi che la matrice 2×2 di elementi $\partial^2 F/\partial q_i \partial P_j$ è non singolare in $\mathcal{D}$.
4. Si consideri il sistema hamiltoniano descritto, nelle variabili (Q_1, Q_2, P_1, P_2), dall'hamiltoniana
$$H(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = Q_1^2 + (P_1 - Q_2)^2 \Big(Q_2^2 + (P_2 - Q_1)^2 \Big),$$
e si dimostri che nelle variabili (q_1, q_2, p_1, p_2) il sistema è separabile.
5. [Si verifichi esplicitamente che la trasformazione di coordinate conserva le parentesi di Poisson fondamentali].