FM210 Meccanica Analitica
Soluzioni Tutorato 1

Docente: Guido Gentile - Tutori: Lorenzo De Leonardis, Laura Fagotto

29/02/2024

Soluzione Esercizio 1

Abbiamo due modi di sviluppare questo esercizio:

- Notiamo che, se $x = (x_1, x_2, x_3)$, il sistema dinamico diventa:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 + x_2 \\ \dot{x_2} = x_2 + x_3 \\ \dot{x_3} = x_3 \end{cases} .$$

  Quindi si può partire dall'ultima equazione, che sappiamo avere soluzione $x_3(t) = e^t x_3(0) = e^t$.

  A questo punto sostituiamo alla seconda equazione e risolviamo la ODE nella variabile x_2 e la soluzione è $x_2(t) = e^t(t+1)$ (qui abbiamo usato la formula standard per le ODE lineari del primo ordine: $x_2(t) = e^t(x_2(0) + \int_0^t e^{-s}e^s ds)$).

  Infine sostituiamo $x_2(t)$ nella prima equazione e troviamo nello stesso modo la soluzione $x_1(t) = e^t(t + \frac{t^2}{2})$.

  In conclusione, la soluzione sarà

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(t + \frac{t^2}{2}) \\ e^t(t+1) \\ e^t \end{pmatrix} .$$

- Notiamo che la matrice A è somma di una matrice diagonale più una matrice nilpotente che commutano. Quindi applichiamo quello visto a lezione:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B + C.$$

  Quindi, $e^{At} = e^{Bt}e^{Ct}$ con

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}, \qquad e^{Ct} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & t^2/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

  La soluzione sarà, quindi, $x(t) = e^{At}x(0)$.

Soluzione esercizio 2

Procediamo a lezione calcolando il polinomio caratteristico della matrice che sarà:

$$\mu(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}) = \lambda^2 - 2\lambda + 2,$$

con $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, nroviamo le radici che saranno rispettivamente $\lambda_1 = 1 + i$ e $\lambda_2 = 1 - i$ e calcoliamo i rispettivi autospazi.

Facendo la formula standard per trovare gli autospazi φ_1 e φ_2 rispettivamente di λ_1 e λ_2, troviamo che

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \varphi_2 = \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se la scriviamo nella base complessa, abbiamo la matrice che diagonalizza A fatta nel seguente modo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{tale che} \quad A = Q^{-1}BQ.$$

La soluzione, quindi, diventa:

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^t(\cos t + \sin t) & 2e^t \sin t \\ -e^t \sin t & e^t(\cos t - \sin t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(\cos t + 3\sin t) \\ e^t(\cos t - 2\sin t) \end{pmatrix}$$

.

Soluzione Esercizio 3

Spezzando la matrice in parte diagonale più parte nilpotente, e procedendo come prima, la soluzione è:

$$x(t) = \begin{pmatrix} -e^t - te^t - t^2e^2 \\ e^{2t}2te^{2t} \\ -2e^{4t} \end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 6

Dividiamo in vari casi:

- "$\alpha = 0$" : in questo caso la matrice A si spezza in una matrice diagonale più una matrice nilpotente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

  Procedendo come prima, si trova che la soluzione è:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t x_1(0) \\ te^t x_1(0) + e^t x_2(0) \end{pmatrix}.$$

- "$\alpha > 0$" : Diagonalizziamo la matrice come abbiamo fatto sopra e troviamo le matrici Q e B tale che $A = Q^{-1}BQ$:

$$B = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{\alpha} \end{pmatrix}; \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & -\sqrt{\alpha} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

  A questo punto, quindi, la soluzione è:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^t}{2}(e^{\sqrt{\alpha}t} + e^{-\sqrt{\alpha}t})x_1(0) + \frac{\sqrt{\alpha}e^t}{2}(e^{\sqrt{\alpha}t} - e^{-\sqrt{\alpha}t})x_2(0) \\ \frac{e^t}{2\sqrt{\alpha}}(e^{\sqrt{\alpha}t} - e^{-\sqrt{\alpha}t})x_1(0) + \frac{e^t}{2}(e^{\sqrt{\alpha}t} + e^{-\sqrt{\alpha}t})x_2(0) \end{pmatrix}.$$

- "$\alpha < 0$" : la soluzione per $\alpha < 0$ è la stessa per $\alpha > 0$. Possiamo riscrivere la soluzione usando che:

$$\sqrt{\alpha} = i\sqrt{|\alpha|} \quad \text{e} \quad \cos(\sqrt{\alpha}t) = \frac{e^{\sqrt{\alpha}}t + e^{-\sqrt{\alpha}}t}{2};\ \cos(\sqrt{\alpha}t) = \frac{e^{\sqrt{\alpha}}t - e^{-\sqrt{\alpha}}t}{2i}.$$

  Riscriviamo la soluzione, quindi, nel seguente modo:

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos(\sqrt{|\alpha|}t)x_1(0) - \sqrt{|\alpha|}e^t \sin(\sqrt{|\alpha|}t)x_2(0) \\ \frac{e^t}{2\sqrt{|\alpha|}} \sin(\sqrt{|\alpha|}t)x_1(0) + e^t \cos(\sqrt{|\alpha|}t)x_2(0). \end{pmatrix} \tag{2}$$

Soluzioni esercizio 9

Sviluppiamo l'esercizio solo per il secondo sistema (per il primo l'esercizio è analogo). Dobbiamo dimostrare che $\frac{d}{dt}\mathcal{W}(x,y)=0$:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{W}(x,y)=\frac{d}{dt}\mathcal{W}(x,y)=-D\ln x+Cx+By-A\ln y=-\frac{D}{x}\dot{x}+C\dot{x}+B\dot{y}-A\frac{\dot{y}}{y}.$$

Sostituendo all'equazione precedente $\dot{x}=(A-By)x$ e $\dot{y}=(Cx-D)y$ si trova che $\frac{d}{dt}\mathcal{W}(x,y)=0$.

Soluzioni esercizio 5

(ii) Siano $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ tali che $[A,B]=0$ (ovvero le due matrici commutano), allora

$$e^Ae^B=\left(\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}A^k\right)\left(\sum_{j\geq 0}\frac{1}{j!}B^j\right)=$$
$$\left(id+A+\frac{1}{2}A^2+...+\frac{1}{k!}A^k+...\right)\left(id+B+\frac{1}{2}B^2+...+\frac{1}{j!}B^j+...\right)=$$
$$id+(AB+BA)+\frac{1}{2}(A+B)^2+\frac{1}{6}(A+B)^3+...$$

Quindi mi accorgo che se le matrici commutano mi è possibile ricostruire ordine per ordine il binomio di newton, e il calcolo si equivale a quello fatto come se A e B fossero dei numeri.

$$\left(id+A+\frac{1}{2}A^2+...+\frac{1}{k!}A^k+...\right)\left(id+B+\frac{1}{2}B^2+...+\frac{1}{j!}B^j+...\right)=$$
$$id+(AB+BA)+\frac{1}{2}(A+B)^2+\frac{1}{6}(A+B)^3+...=\sum_{i\geq 0}\frac{(A+B)^i}{i!}=e^{A+B}$$

(iii) Sia $A\in M_n(\mathbb{C})$ una matrice diagonalizzabile, ovvero esiste una matrice P invertibile tale che $A=PDP^{-1}$, allora osservo che:

$$e^A=\sum_{j\geq 0}\frac{A^j}{j!}=\sum_{j\geq 0}\frac{(PDP^{-1})^j}{j!}$$

Per induzione su $j\geq 0$ dimostro che:

$$(PDP^{-1})^j=PD^JP^{-1}$$

Quindi:

$$e^A=\sum_{j\geq 0}\frac{A^j}{j!}=\sum_{j\geq 0}\frac{(PDP^{-1})^j}{j!}=\sum_{j\geq 0}\frac{PD^JP^{-1}}{j!}=D\left(\sum_{j\geq 0}\frac{D^j}{j!}\right)D^{-1}=Pe^DP^{-1}$$

(iv) Se esiste una matrice S invertibile tale che $M=SJS^{-1}$, con $J=D+N$ e $[D,N]=0$, allora:

$$e^M=e^{S(D+N)S^{-1}}=e^{SDS^{-1}+SNS^{-1}}$$

Dato che $[D,N]=0$, allora anche $[SDS^{-1},SN^S-1]=S[D,N]S^{-1}=0$ e quindi per il punto (ii) $e^{SDS^{-1}+SNS^{-1}}=e^{SDS^{-1}}\cdot e^{SNS^{-1}}=Se^D\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{k!}N^k\right)S^{-1}$, con $k=\min\{n\in\mathbb{N}:N^n=0\}$.

Da ciò segue immediatamente che il sistema

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)\\ x(0)=x_0\end{cases}$$

ammette come unica soluzione:

$$x(t) = e^{At} = e^{S(D+N)tS^{-1}} = Se^{tD}\left(\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{k!}(tN)^k\right) S^{-1}x_0$$

Soluzioni Esercizio 8

(v) Data la seguente ODE:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + f(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

con $A \in M_n(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n$ con componenti a_{ij} funzioni continue su un certo intervallo e f un vettore con componenti continue.

La formula esatta è la seguente:

$$x(t) = e^{At}x_0 + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau} f(\tau)\, d\tau$$

Dove $e^{At}x_0$ rappresenta la soluzione dell'equazione omogenea associata $\dot{x}(t) = Ax(t)$ e la soluzione particolare viene trovata con il metodo delle variazioni di costanti (o di Lagrange) cercandola della forma $x_p(t) = e^{At}y(t)$.

Soluzioni Esercizio 10
Risolvo il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + 3t \\ \dot{y} = x + ay - 4\sin t \end{cases}$$

con dato iniziale $(x(0), y(0) = (1, 0)$ usando la formula dell'esercizio 8.
Prima trovo la soluzione dell'equazione omogenea $\dot{z} = Az$, con $z = (x, y)$ e $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x_o(t) \\ y_o(t) \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\mu(a)} & -\frac{2}{\mu(a)} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{a-\mu(a)}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{a+\mu(a)}{2}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\mu(a)} & \frac{a^2-a\mu(a)-2}{a^2-a\mu(a)-4} \\ \frac{1}{\mu(a)} & \frac{a^2+a\mu(a)-2}{a^2+a\mu(a)-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove $\mu(a) = \sqrt{a^2 - 4}$, e per (x_o, y_o) si intende la soluzione dell'equazione omogenea.
Risolvo e ottengo che:

$$\begin{pmatrix} x_o(t) \\ y_o(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{2e^{\frac{a-\mu(a)}{2}t}}{\mu^2(a)-a\mu(a)} + \frac{2e^{\frac{a+\mu(a)}{2}t}}{\mu^2(a)+a\mu(a)}\right) \\ \frac{e^{\frac{a+\mu(a)}{2}t} - e^{\frac{a-\mu(a)}{2}t}}{\mu(a)} \end{pmatrix}$$

Nel caso in cui $a \geq 4$ allora $\mu(a) \in \mathbb{R}$ e la soluzione è reale.
Nel caso in cui $a < 4$ allora la soluzione è scrivibile in seni e coseni ricordando che $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ e $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$
Ora per il caso con forzante applico la formula:

$$z(t) = e^{At}z(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau} f(\tau)\, d\tau$$

dove $z_o(t) = (x_o(t), y_o(t)) = e^{At}z(0) = \begin{pmatrix} -\left(\frac{2e^{\frac{a-\mu(a)}{2}t}}{\mu^2(a)-a\mu(a)} + \frac{2e^{\frac{a+\mu(a)}{2}t}}{\mu^2(a)+a\mu(a)}\right) \\ \frac{e^{\frac{a+\mu(a)}{2}t} - e^{\frac{a-\mu(a)}{2}t}}{\mu(a)} \end{pmatrix}.$