FM210 Meccanica Analitica
Soluzioni Tutorato 10

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Francesco Caristo, Laura Fagotto

24/05/2024

Esercizio 1. *Notiamo innanzitutto che la trasformazione è ben definita se* $\alpha \neq 0$. *La trasformazione è canonica se solo se* $\{Q, P\} = 1$, *si ha*

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = -\frac{\beta}{\alpha}e^{-\beta q}\alpha e^{\beta q} = -\beta$$

che è uguale a 1 *se solo se* $\beta = -1$.

Esercizio 2. *Il momento coniugato alla variabile* q *è*

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \dot{q} + q \implies \dot{q} = p - q$$

Pertanto

$$H(p, q) = p\dot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q})|_{\dot{q}=f(q,p)} = \frac{1}{2}p^2 - pq - \frac{5}{2}q^2$$

Le corrispondenti equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p - q \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = p + 5q \end{cases}$$

Ci sono vari modi per risolvere queste equazioni, ad esempio, siccome è un sistema lineare potremmo fare l'esponenziale di matrice; tuttavia questo metodo è abbastanza contoso, quindi offriamo una soluzione alternativa. Dalla prima equazione segue derivandola che

$$\ddot{q} = \dot{p} - \dot{q} = 6q$$

Che ha come soluzione $q(t) = Ae^{\sqrt{6}t} + Be^{-\sqrt{6}t}$, *dove* A *e* B *sono costante arbitrarie. Inoltre*

$$p(t) = q(t) + \dot{q}(t) = (1 + \sqrt{6})Ae^{\sqrt{6}t} + (1 - \sqrt{6})Be^{-\sqrt{6}t}$$

Esercizio 3. *Per determinare i valori di* a, b *per cui la trasformazione è canonica, imponiamo che le parentesi di Poisson siano uguali ad* 1*:*

$$\{Q, P\} = p^{b-1}((2a - b)\log q + 2a) = 1 \implies 2a = b = 1$$

quindi la trasformazione di coordinate canonica è

$$\begin{cases} Q = \log p + \log q \\ P = -pq\log q \end{cases}$$

Dalla prima equazione notiamo che $e^Q = pq$, *sostituendo poi nella seconda equazione otteniamo che la trasformazione inversa è data da*

$$\begin{cases} q = e^{-Pe^{-Q}} \\ p = e^{Q+Pe^{-Q}} \end{cases}$$

Se sostituiamo nell'hamiltoniana data dal testo, otteniamo che la nuova è

$$H(Q,P) = \frac{P^2}{2}$$

le nuove equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{Q} = P \\ \dot{P} = 0 \end{cases}$$

La soluzione in corrispondenza dei dati iniziali $(Q(0), P(0)) = (0, -1)$ *è data da*

$$\begin{cases} P(t) = -1 \\ Q(t) = -t \end{cases}$$

Usando la trasformazione inversa, otteniamo

$$\begin{cases} q(t) = e^{e^t} \\ p(t) = e^{-t-e^t} \end{cases}$$

Esercizio 4. *Per trovare i parametri imponiamo* $\{Q, P\} = 1$*:*

$$\{Q, P\} = (-\beta\gamma - \alpha\beta)e^{\gamma p}$$

che sono uguali ad 1 solo se $\gamma = 0$ *e* $\alpha\beta = -1$*, per tali valori possiamo scrivere la trasformazione come*

$$\begin{cases} p = \frac{Q+\log q}{\alpha} \\ P = -\frac{q}{\alpha} \end{cases}$$

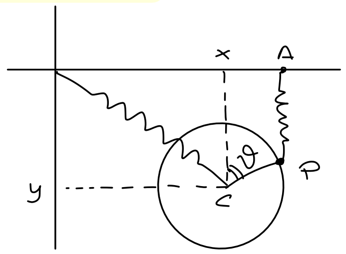
Per trovare una funzione generatrice di prima spece dobbiamo imporre

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F}{\partial q} \\ P = -\frac{\partial F}{\partial Q} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{Q+\log q}{\alpha} \\ \frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{q}{\alpha} \end{cases}$$

Integrando la prima equazione (nella variabile q*) abbiamo* $F(q,Q) = \frac{qQ}{\alpha} + \frac{q\log q - q}{\alpha} + f(Q)$*, espressione che derivata in* Q *e sostituita nella seconda rquazione ci dà* $\frac{q}{\alpha} + f'(q) = \frac{q}{\alpha}$*, quindi* $f(q)$ *è costante arbitraria che possiamo porre uguale a* 0*. In conlusione una funzione generatrice di prima specie è*

$$F(q,P) = \frac{q}{\alpha}(Q + \log q - 1)$$

ESERCIZIO 5



- Disco omogeneo di raggio $R=1$ e massa $M=1$
- Piano verticale
- Due molle con costante elastica k come in figura.
- P un punto sul disco e A ha la stessa ascissa di P.

① Si scriva la lagrangiana

$C=(x,y)$, $P=(x+\sin\vartheta,\ y-\cos\vartheta)$, $A=(x+\sin\vartheta, 0)$

$$T=\frac{1}{2}M(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}MI\dot{\vartheta}^2=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}\frac{R^2}{2}\dot{\vartheta}^2=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{4}\dot{\vartheta}^2$$

$$V=Mgy+\frac{1}{2}k\left(x^2+y^2\right)+\frac{1}{2}k\left(y-\cos\vartheta\right)^2 \rightsquigarrow \mathcal{L}=T-V$$

② E-L:
$$\begin{cases}\ddot{x}=-kx\\ \ddot{y}=g+ky+k(y-\cos\vartheta)=g+2ky-k\cos\vartheta\\ \frac{1}{2}\ddot{\vartheta}=k(y-\cos\vartheta)\sin\vartheta\end{cases}$$

③ Conf. di equilibrio:

$$\begin{cases}x=0\\ \Rightarrow 2ky=k\cos(k\pi)-g \\ k(y-\cos\vartheta)\sin\vartheta=0\end{cases}$$

k pari, $y=\frac{k-g}{2k}$

k dispari $y=-\frac{k+g}{2k}$

$\rightsquigarrow k\neq 0$, $\sin\vartheta=0$

$\vartheta=k\pi$

$$(x_0,y_0,\vartheta_0)=\left(0,\frac{k-g}{2k},2k\pi\right);\ (x_0,y_0,\vartheta_0)=\left(0,-\frac{k+g}{2k},(2k+1)\pi\right)$$

$$\begin{cases}x=0\\ y=-\frac{g}{k}\\ y-\cos\vartheta=0\end{cases}\qquad (x_0,y_0,\vartheta_0)=\left(0,-\frac{g}{k},\arccos\left(-\frac{g}{k}\right)\right)$$

$\downarrow$

questo va bene solo se $-\frac{g}{k}\in[-1,0)$