Esercizio 1. *Data la lagrangiana, p è data da*

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\dot{q}}{q^2} \implies \dot{q} = pq^2$$

L'hamiltoniana sarà pertanto

$$H(q,p) = \frac{p^2q^2}{2} + \log q$$

Le equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = pq^2 \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -p^2q - \frac{1}{q} \end{cases}$$

Data F come nel testo, la trasformazione canonica è

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{P}{q} \\ Q = \frac{\partial F}{\partial P} = \log q \end{cases}$$

Che corrisponde a

$$\begin{cases} P = qp \\ Q = \log q \end{cases}$$

La nuova hamiltoniana è

$$H(Q,P) = \frac{P^2}{2} + Q$$

di conseguenza le nuove equazioni del moto sono

$$\begin{cases} \dot{Q} = P \\ \dot{P} = -1 \end{cases}$$

che si integrano immedietamente, portandoci ad avere

$$P(t) = -t + P(0) \quad Q(t) = -\frac{t^2}{2} + P(0)t + Q(0)$$

con $P(0) = 0$ e $Q(0) = \log 1 = 0$.

Se torniamo alle variabili di partenza otteniamo

$$q(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad p(t) = -te^{\frac{t^2}{2}}$$

Esercizio 2. *Esercizio 7.99 pag. 415*

Esercizio 3. *La prima trasformazione non è canonica, infatti:*

$$\{Q_1, Q_2\} = \frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}$$
$$= -\sqrt{p_2}\sin q_1 \frac{\cos q_2}{2\sqrt{p_1}} + \frac{\cos q_1}{2\sqrt{p_2}}\sqrt{p_1}\sin q_2 \neq 0$$

La seconda trasformazione, invece, è canonica, infatti è facile vedere che

$$\{Q_i, Q_j\} = 0 \quad \{P_i, P_j\} = 0 \quad \{Q_1, P_2\} = 0 \quad \{Q_2, P_1\} = 0$$

visto che in ogni prodotto delle parentesi di Poisson c'è sempre almeno una derivata nulla, mentre

$$\{Q_1, P_1\} = \sin^2 q_1 + \cos^2 q_1 = 1 \quad \{Q_2, P_2\} = \sin^2 q_2 + \cos^2 q_2 = 1$$

Dobbiamo quindi trovare una funzione generatrice di prima specie per la seconda trasformazione, che dopo avere elevato al quadrato le prime due equazioni scriviamo nella forma

$$\begin{cases} p_1 = \frac{Q_1^2}{\cos^2(q_1)} \\ p_2 = \frac{Q_2^2}{\cos^2(q_2)} \\ P_1 = -2Q_1 \tan q_1 \\ P_2 = -2Q_2 \tan q_2 \end{cases}$$

Ora, imponendo le condizioni di funzione generatrice di prima specie, troviamo

$$p_1 = \frac{\partial F}{\partial q_1} \implies F = Q_1^2 \tan q_1 + f(q_2, Q_1, Q_2)$$

Deriviamo rispetto a q_2 per usare la seconda identità

$$p_2 = \frac{\partial F}{\partial q_2} \implies \frac{\partial f}{\partial q_2} = \frac{Q_2^2}{\cos^2(q_2)} \implies f = Q_2^2 \tan q_2 + g(Q_1, Q_2) \implies F = Q_1^2 \tan q_1 + Q_2^2 \tan q_2 + g(Q_1, Q_2)$$

Se imponiamo $P_i = -\frac{\partial F}{Q_i}$, si vede facilmente che g è costante; pertanto una funzione generatrice di prima specie è

$$F(q_1, q_2, Q_1, Q_2) = Q_1^2 \tan q_1 + Q_2^2 \tan q_2$$

La matrice di elementi $\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial Q_j}$ è la seguente

$$\begin{pmatrix} \frac{2Q_1}{\cos^2 q_1} & 0 \\ 0 & \frac{2Q_2}{\cos^2 q_2} \end{pmatrix}$$

che è non singolare poiché $Q_1, Q_2 \neq 0$.

Non è possibile trovare una trasformazione generatrice di seconda specie: Riscriviamo l'equazione come

$$\begin{cases} p_1 = \frac{P_1^2}{4 \sin^2 q_1} \\ p_2 = \frac{P_2^2}{4 \sin^2 q_2} \\ Q_1 = \frac{P_1 \cot q_1}{2} \\ Q_2 = \frac{P_2 \cot q_2}{2} \end{cases}$$

Ora proviamo ad imporre le condizioni di funzione generatrice di seconda specie

$$p_1 = \frac{\partial F}{\partial q_1} \implies F = -\frac{P_1^2}{4} \cot q_1 + f(q_2, P_1, P_2)$$

Se ora imponiamo la condizione

$$Q_1 = \frac{\partial F}{\partial P_1} \implies -\frac{P_1}{2} \cot q_1 + \frac{\partial f}{\partial P_1} = \frac{P_1 \cot q_1}{2} \implies \frac{\partial f}{\partial P_1} = P_1 \cot q_1$$

Ma quest'ultima uguaglianza non può essere verificata perché f, e di conseguenza la sua derivata, non dipende da q_1.

Esercizio 4.

Soluzione Se si definisce $A := \sqrt{(1-qp)/(1+qp)}$, si può riscrivere $Q = -pA$ e $P = qA^{-1}$, così che si trova

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = -p\frac{\partial A}{\partial q}, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = -A - p\frac{\partial A}{\partial p}, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = \frac{1}{A} - \frac{q}{A^2}\frac{\partial A}{\partial q}, \quad \frac{\partial P}{\partial p} = -\frac{q}{A^2}\frac{\partial A}{\partial p},$$

dove

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial q} &= \frac{1}{2A}\frac{-p(1+qp)-p(1-qp)}{(1+qp)^2} = -\frac{1}{A}\frac{p}{(1+qp)^2}, \\
\frac{\partial A}{\partial p} &= \frac{1}{2A}\frac{-q(1+qp)-q(1-qp)}{(1+qp)^2} = -\frac{1}{A}\frac{q}{(1+qp)^2}.
\end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned}
\{Q,P\} &= \frac{qp}{A^2}\frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial A}{\partial p} + \left(A + p\frac{\partial A}{\partial p}\right)\left(\frac{1}{A} - \frac{q}{A^2}\frac{\partial A}{\partial q}\right) \\
&= \frac{qp}{A^2}\frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial A}{\partial p} + 1 + \frac{p}{A}\frac{\partial A}{\partial p} - \frac{q}{A}\frac{\partial A}{\partial q} - \frac{qp}{A^2}\frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial A}{\partial p} = 1 + \frac{p}{A}\frac{\partial A}{\partial p} - \frac{q}{A}\frac{\partial A}{\partial q}
\end{aligned}$$

e, ponendo $qp = x$, si trova

$$\frac{\partial A}{\partial q} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q} = p\frac{\partial A}{\partial x}, \quad \frac{\partial A}{\partial p} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} = q\frac{\partial A}{\partial x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{p}{A}\frac{\partial A}{\partial p} - \frac{q}{A}\frac{\partial A}{\partial q} = \frac{qp}{A}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{qp}{A}\frac{\partial A}{\partial x} = 0,$$

da cui segue che $\{Q,P\} = 1$; poiché si ha banalmente $\{Q,Q\} = \{P,P\} = 0$, se ne deduce che la trasformazione è canonica. Moltiplicando tra loro Q e P, si trova immediatamente che $QP = -qp$. Dall'espressione di P in teermini di q e p si trova

$$P^2\,(1-qp) = q^2\,(1+qp) \Longrightarrow P^2\,(1+QP) = q^2\,(1-QP) \Longrightarrow q^2 = P^2\frac{1+QP}{1-QP} \Longrightarrow q = P\sqrt{\frac{1+QP}{1-QP}},$$

dove si è utilizzato che P e q devono avere lo stesso segno (per definizione di P). Si ha inoltre

$$p = -\frac{QP}{q} = -\frac{QP}{P}\sqrt{\frac{1-QP}{1+QP}} = -Q\sqrt{\frac{1-QP}{1+QP}},$$

così che in conclusione la trasformazione inversa è data da

$$\begin{cases}
q = P\sqrt{\dfrac{1+QP}{1-QP}}, \\
p = -Q\sqrt{\dfrac{1-QP}{1+QP}}.
\end{cases}$$

Per determinare una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$, innanzitutto si esprime p in termini di q e P, i.e.

$$P^2\,(1-qp) = q^2\,(1+qp) \quad \Longrightarrow \quad P^2-q^2 = p\,q(q^2+P^2)) \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{P^2-q^2}{q(q^2+P^2},$$

e si impone che p sia uguale a $\partial F/\partial q$; si scrive quindi

$$\frac{P^2-q^2}{q(q^2+P^2} = \frac{A}{q} + \frac{Bq+C}{q^2+P^2} \quad \Longrightarrow \quad A=1, \quad B=-2, \quad C=0,$$

così che si ottiene

$$F(q, P) = \int \mathrm{dq}\Big(\frac{1}{\mathrm{q}} - \frac{2\mathrm{q}}{\mathrm{q}^2+\mathrm{P}^2}\Big) = \log\mathrm{q} - \log(\mathrm{q}^2+\mathrm{P}^2) + \mathrm{c}_1(\mathrm{P}),$$

dove $c_1(P)$ è una funzione arbitraria di P. Si ha inoltre

$$Q = -\frac{qp}{P} = -\frac{q}{P}\frac{P^2-q^2}{q(q^2+P^2} = \frac{P^2-q^2}{P(q^2+P^2},$$

così che, imponendo che Q sia uguale a $\partial F/\partial P$ e ragionando come prima, si trova

$$F(q, P) = \int \mathrm{dP}\Big(\frac{1}{\mathrm{P}} - \frac{2\mathrm{P}}{\mathrm{q}^2+\mathrm{P}^2}\Big) = \log\mathrm{P} - \log(\mathrm{q}^2+\mathrm{P}^2) + \mathrm{c}_2(\mathrm{q}),$$

dove $c_2(q)$ è una funzione arbitraria di q. Infine, imponendo che le due espressioni di $F(q, P)$ coincidano, si ottiene la funzione generatrice di seconda In conclusione la soluzione assume la forma

$$q(t) = \sqrt{\frac{1+2t}{1-2t}}, \qquad p(t) = -2t\sqrt{\frac{1-2t}{1+2t}},$$

Punto 1. (*Metodo I*) Ricordiamo che, data la lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q})$, si definisce il momento cinetico

$$p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}(q, \dot{q}).$$

Quando la funzione $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}(q, \cdot)$ è invertibile, allora possiamo esprimere $\dot{q}$ in termini di p e definire l'hamiltoniana del sistema come la funzione

$$\mathcal{H}(q, p) := p\dot{q} - \mathcal{L}.$$

Nel nostro caso, la funzione

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = (1+2q^2)^2 e^{2q^2}\,\dot{q}$$

è una funzione lineare (vista come funzione di $\dot{q}$) e quindi è chiaramente invertibile: abbiamo dunque

$$\dot{q} = \frac{p}{(1+2q^2)^2 e^{2q^2}}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(q,p) &= \frac{p^2}{(1+2q^2)^2 e^{2q^2}} - \frac{1}{2}(1+2q^2)^2 e^{2q^2}\left(\frac{p}{(1+2q^2)^2 e^{2q^2}}\right)^2 \\
&= \frac{p^2}{(1+2q^2)^2 e^{2q^2}} - \frac{1}{2}\frac{p^2}{(1+2q^2)^2 e^{2q^2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{p^2}{(1+2q^2)^2 e^{2q^2}}.
\end{aligned}$$

Si conclude che l'hamiltoniana del sistema è

$$\boxed{\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{(1+2q^2)^2 e^{2q^2}}.}$$

Punto 2. Le equazioni di Hamilton del moto sono date da:

$$
\begin{cases}
\dot{q} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \\[2ex]
\dot{p} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}.
\end{cases}
\tag{2}
$$

Calcoliamo i termini di destra rispettivamente della prima e seconda equazione del sistema (2). Usando l'hamiltoniana calcolata al punto 1, abbiamo

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} &= -\frac{1}{2}p^2 \left(-2(1+2q^2)^{-3}(4q)e^{-2q^2} + (1+2q^2)^{-2}e^{-2q^2}(-4q) \right) \\
&= -\frac{1}{2}p^2(4q)(1+2q^2)^{-2}e^{-2q^2} \left(-2(1+2q^2)^{-1} - 1 \right) \\
&= 2p^2q(1+2q^2)^{-2}e^{-2q^2}(1+2+2q^2)(1+2q^2)^{-1} \\
&= 2p^2q(1+2q^2)^{-3}e^{-2q^2}(3+2q^2).
\end{aligned}
$$

e

$$
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{1}{2}(2p)(1+2q^2)^{-2}e^{-2q^2} = p(1+2q^2)^{-2}e^{-2q^2},
$$

da cui otteniamo le equazioni di Hamilton del nostro sistema:

$$
\boxed{
\begin{cases}
\dot{q} = \dfrac{p}{(1+2q^2)^2 e^{2q^2}}, \\[2ex]
\dot{p} = \dfrac{2p^2q(3+2q^2)}{(1+2q^2)^3 e^{2q^2}}.
\end{cases}
}
$$

Punto 3. Consideriamo la trasformazione

$$
\begin{cases}
Q = q^2 + \ln\left(\dfrac{1+2q^2}{p}\right) \\[2ex]
P = \dfrac{qp}{1+2q^2}.
\end{cases}
\tag{3}
$$

Per verificare che si tratta di una trasformazione canonica, dobbiamo controllare che le parentesi di Poisson fondamentali soddisfano

$$\{Q,P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1, \tag{4}$$

essendo i casi $\{Q,Q\} = 0$ e $\{P,P\} = 0$ ovvi in dimensione uno (i.e. le variabili q e p sono in $\mathbb{R}$). Calcoliamo i vari termini di (4) separatamente. Sfruttando

(3) otteniamo :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial q} &= 2q + \frac{4q}{1+2q^2};\\
\frac{\partial P}{\partial p} &= \frac{q}{1+2q^2};\\
\frac{\partial Q}{\partial p} &= \frac{p}{1+2q^2}\left(-\frac{1+2q^2}{p^2}\right) = -\frac{1}{p}\\
\frac{\partial P}{\partial q} &= p\left(\frac{1+2q^2-4q^2}{(1+2q^2)^2}\right) = p\left(\frac{1-2q^2}{(1+2q^2)^2}\right).
\end{aligned}$$

Sostituendo quanto ottenuto nella formula per $\{Q,P\}$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\{Q,P\} &= \left(2q + \frac{4q}{1+2q^2}\right)\cdot\frac{q}{1+2q^2} + \frac{1}{p}\cdot p\cdot\left(\frac{1-2q^2}{(1+2q^2)^2}\right)\\
&= q\left(\frac{2q+4q^3+4q}{(1+2q^2)^2}\right) + \left(\frac{1-2q^2}{(1+2q^2)^2}\right)\\
&= \frac{2q^2+4q^4+1+2q^2}{(1+2q^2)^2}\\
&= \frac{4q^4+4q^2+1}{(1+2q^2)^2}\\
&= \frac{(1+2q^2)^2}{(1+2q^2)^2} = 1,
\end{aligned}$$

da cui

$$\boxed{\{Q,P\} = 1}$$

come volevasi dimostrare.

Punto 4. Per determinare $\mathcal{K}(Q,P)$ dobbiamo esprimere l'hamiltoniana trovata al punto 1 nelle nuove coordinate Q e P. A tal fine ricordiamo che

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{(1+2q^2)^2 e^{2q^2}}.$$

Dimostriamo che

$$\frac{p^2}{(1+2q^2)^2 e^{2q^2}} = e^{-2Q}, \tag{5}$$

dal quale dedurremo subito che

$$\mathcal{K}(Q,P) = \frac{1}{2}e^{-2Q}.$$

Per provare (5), usiamo la trasformazione canonica del punto precedente, dalla quale segue l'identità:

$$Q - q^2 = \ln\left(\frac{1+2q^2}{p}\right),$$

da cui, per definizione di logaritmo,

$$e^{Q-q^2} = \frac{1+2q^2}{p}.$$

Elevando al quadrato i membri della precedente equazione si ottiene

$$e^{2Q-2q^2} = \left(\frac{1+2q^2}{p}\right)^2,$$

ovvero, considerando i reciproci,

$$e^{-2Q+2q^2} = \frac{p^2}{(1+2q^2)^2}.$$

Infine, dividendo ambo i membri per $e^{2q^2} > 0$ si ha

$$\frac{p^2}{(1+2q^2)^2 e^{2q^2}} = e^{-2Q}.$$

Pertanto la nuova hamiltoniana cercata è

$$\boxed{\mathcal{K}(Q,P) = \tfrac{1}{2}e^{-2Q}.}$$