

# FM210 Meccanica Analitica

## Tutorato 2

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi  
Tutori: Lorenzo de Leonardis, Laura Fagotto

08/03/2024

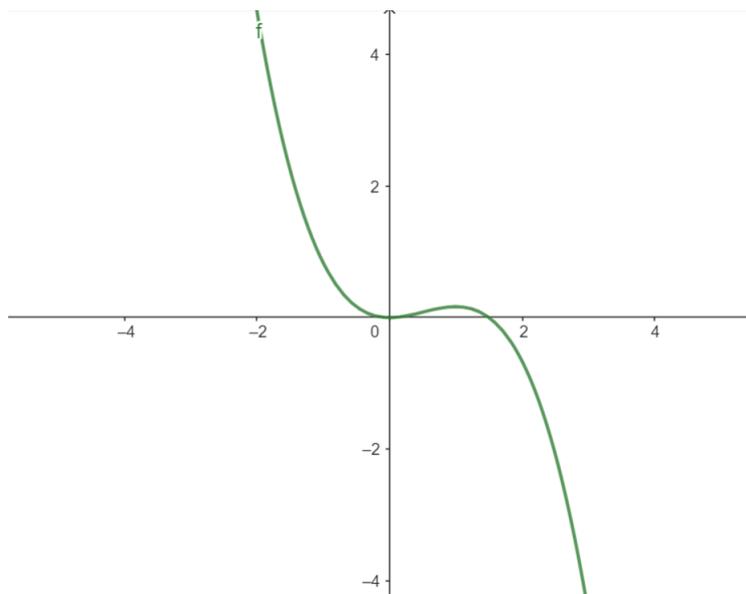
"La matematica è l'arte di dare lo stesso nome a cose diverse."

Henri Poincaré

**Esercizio 1.** Studiamo separatamente i vari punti:

1. La costante del moto è l'energia. Nel nostro caso  $x^2 - x = \ddot{x} = -V'(x)$ ; integrando quindi si ha che  $V(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ .
2. Per disegnare la curve di livello ci aiutiamo con il disegno del potenziale che possiamo ricavare da un semplice studio di funzione.

Il disegno è il seguente:



**Figura 1:** Grafico di  $V(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ .

A questo punto, ad energia fissata, cerchiamo di capire come si creano queste curve di livello. Ricordiamo che il disegno del piano delle fasi ha sulle ascisse le  $x$  e sulle ordinate  $\dot{x}$ ; dobbiamo quindi ricavare la funzione  $\dot{x} = \dot{x}(x)$  ad energia fissata. Dove la ricaviamo? Da 1!

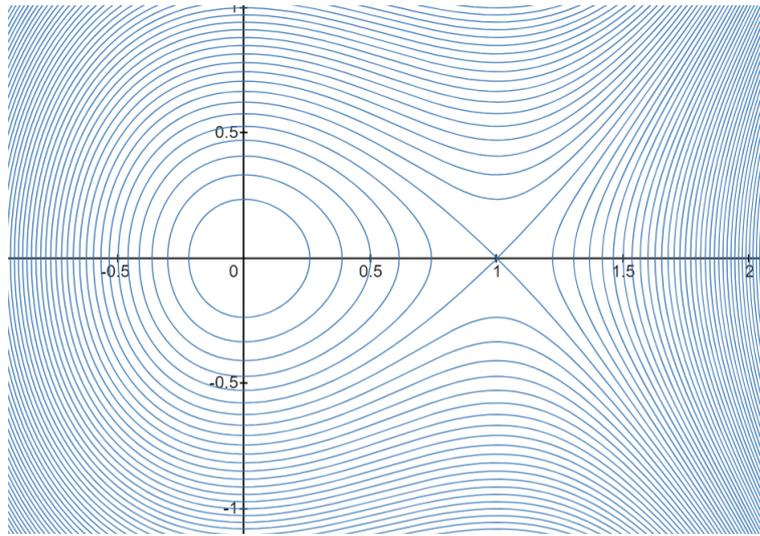
$$\dot{x} = \pm \sqrt{2(E - V(x))}. \quad (1)$$

Notiamo che  $V(x)$  ha un minimo in  $x = 0$  e un massimo in  $x = 1$ . Visto che la funzione tende a  $-\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$ , per ogni valore  $c \in \mathbb{R}$  fissato, esiste  $x \in \mathbb{R}$  tale che  $V(x) \leq c = E$ , quindi la radice ha senso.

Prendiamo qualsiasi  $c \in \mathbb{R}$  e capiamo come funzionano le curve di livello.

- Per  $E < 0$ ,  $\dot{x}$  è definito per  $x \geq x_E$  dove  $x_E$  è l'unico valore tale che  $V(x) = E$ ;
- A  $E = 0 = V(0)$ ,  $\dot{x}$  è definito per  $x \geq x_E$  e per  $x = 0$ ;
- Per  $V(0) = 0 < E < V(1) = \frac{1}{6}$ , la funzione è definita per  $x \geq x_E$ , con  $x_E$  è il valore  $x > 1$  tale che  $V(x) = E$  e per  $x_- \leq x \leq x_+$ , con  $x_-$  la  $x$  negativa dove il potenziale è uguale all'energia e la  $x_+$  l'ultimo punto in cui il potenziale assume il valore di  $E$ ,
- Per  $E = \frac{1}{6}$  abbiamo la separatrice, come visto a lezione;
- Per  $E > \frac{1}{6}$  è definita per  $x \geq x_E$ .

Il piano delle fasi, quindi, diventa la seguente cosa:



**Figura 2:** Piano delle fasi di  $\dot{x} = \pm\sqrt{2(E - (\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}))}$ .

3. Una volta che abbiamo il piano delle fasi, sappiamo anche come sono queste curve di livello.

Per  $E < 0$  le curve di livello sono curve aperte; per  $E = 0$ , abbiamo i moti aperti per le  $x > x_E$  e un punto di equilibrio in  $x = 0$ ; per  $0 < E < \frac{1}{6}$ , abbiamo dei moti periodici intorno a  $x = 0$ , gli altri moti che si formano, invece, continuano ad essere aperti come gli altri; per  $E = \frac{1}{6}$  abbiamo dei moti aperti per  $x > 1$  e abbiamo dei moti asintotici per  $x_- < x < 1$  con  $x_-$  è l'ultima  $x$  dove  $V(x)$  diventa uguale a  $\frac{1}{6}$ .

**Esercizio 2.** Sia  $V(x) = x + 2 \sin x$  un potenziale. Rispondere alle seguenti richieste:

1. L'equazione del moto è:

$$\ddot{x} = -V'(x) = -2 \cos x;$$

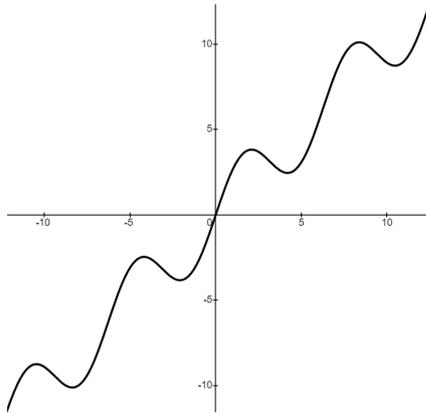
L'energia del sistema è:

$$E(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x)$$

ed ovviamente è una grandezza conservata del sistema meccanico conservativo, infatti:

$$\frac{d}{dt} E(x, \dot{x}) = \partial_x E \cdot \dot{x} + \partial_{\dot{x}} E \cdot \ddot{x} = \dot{x}(\ddot{x} + 1 + 2 \cos x) = 0$$

2. Il grafico dell'energia potenziale è:



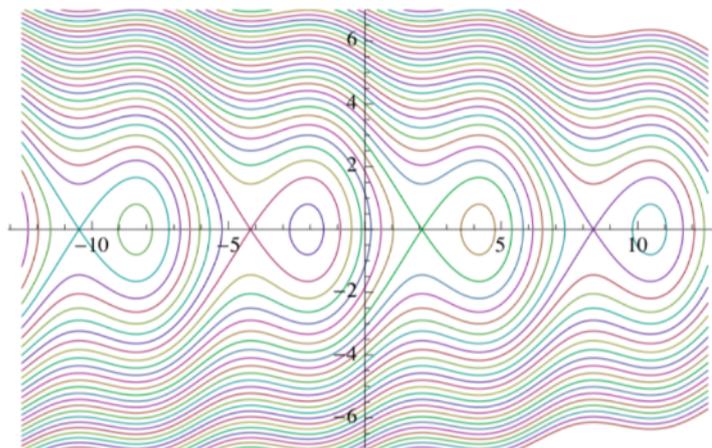
3. I punti di equilibrio del sistema sono i punti critici dell'energia potenziale (ossia gli  $x$  tali che  $V'(x) = 0$ ) sono:

$$a_k := \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad b_k := -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

con  $k \in \mathbb{Z}$ . Gli  $a_k$  sono massimi e i  $b_k$  sono minimi.

4. Fissata l'energia  $E$ , le curve di livello corrispondenti nel piano delle fasi sono determinate da:

$$\dot{x}(x) = \pm \sqrt{2(E - V(x))}$$



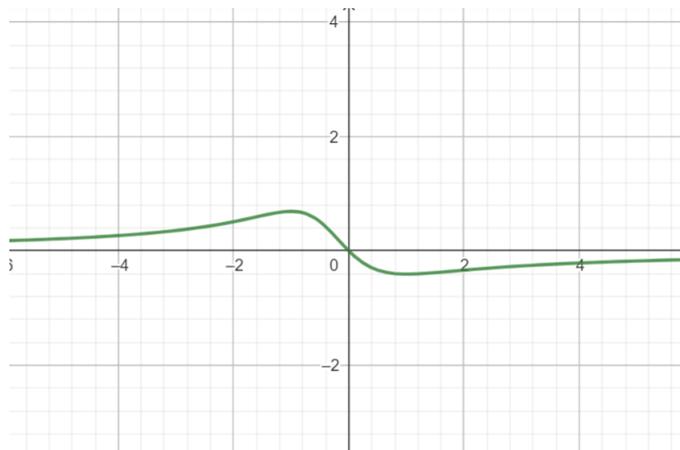
- Se  $E \in (V(b_{k+1}), V(a_k))$ ,  $V(x) = E$  ha 3 soluzioni:  $x_E < x_E^{(-)} < x_E^{(+)}$ , e  $\dot{x}(x)$  è definito per  $x \leq x_E$  e per  $x \in [x_E^{(-)}, x_E^{(+)})$ . Come  $V'(x_E^{(\pm)}) \neq 0$  e  $V'(x_E) = 0$ ,  $\dot{x}'(x_E^{(\pm)}) = \pm\infty$  e  $\dot{x}'(x_E) = 0$ . Inoltre  $\dot{x}(x) \sim \pm x$  per  $x \rightarrow -\infty$ .
- Se  $E \in (V(a_{k-1}), V(b_{k+1}))$ ,  $V(x) = E$  ha una soluzione:  $x_E$ , e  $\dot{x}(x)$  è definito per  $x \leq x_E$ , e  $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$ . Inoltre  $\dot{x}(x) \sim \pm x$  per  $x \rightarrow -\infty$ .
- Se  $E = V(b_k)$ ,  $\dot{x}(x)$  è definito per  $x = b_k$  e per  $x \leq x_E$  dove  $x_E$  è la soluzione di  $V(x_E) = E$  diversa da  $b_k$ ,  $\dot{x}(b_k) = 0$ ,  $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$  e  $\dot{x}(x) \sim \pm x$  per  $x \rightarrow -\infty$ .
- Se  $E = V(a_k)$ ,  $V(x) = E$  ha due soluzioni:  $a_k < x_E$ , e  $\dot{x}(x)$  è definito per  $x \leq a_k$  e per  $x \in [a_k, x_E]$ , e  $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$ ,  $\dot{x}'(a_k) = \pm 3^{1/4}/2$ . Inoltre  $\dot{x}(x) \sim \pm x$  per  $x \rightarrow -\infty$ .

5. Usando il ragionamento della domanda precedente si conclude che:

- se  $x(0) \leq x_E$  dove  $x_E$  è la più piccola delle soluzioni di  $V(x_E) = E$  e se  $E \neq V(a_k)$  allora il moto non è limitato.
- se  $E \in (V(b_{k+1}), V(a_k))$  e  $x(0) \in (b_{k+1}, a_k)$  allora il moto è limitato e periodico.
- se  $E = V(b_k)$  e  $x(0) = b_k$  allora il moto è costante.
- se  $E = V(a_k)$  e  $x(0) > a_k$  allora il moto è limitato e aperiodico.

**Esercizio 3.** Nel caso  $\alpha = 1$ , il dominio è tutto  $\mathbb{R}$  e i punti critici sono  $x = -1$  (punto di massimo) e  $x = 1$  (punto di minimo).

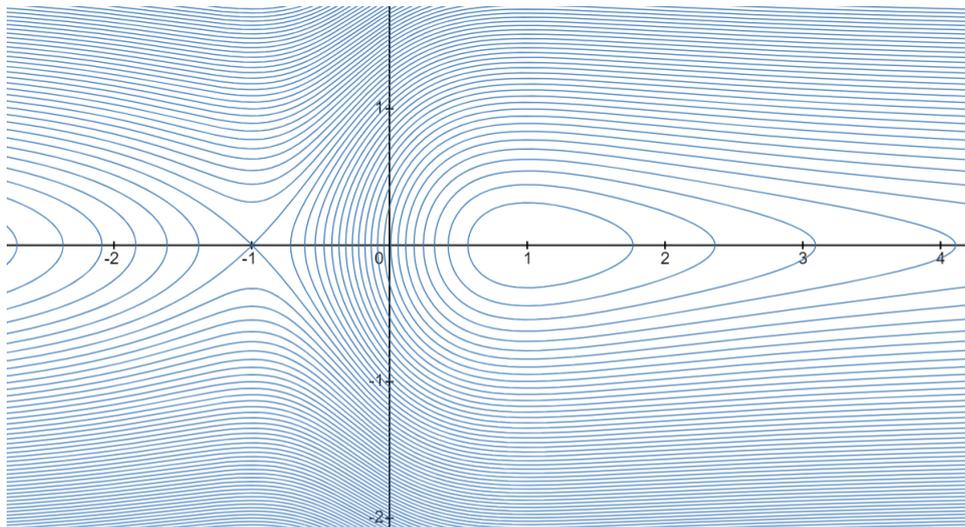
I limiti a  $\pm\infty$  vanno a zero. Siamo quindi pronti per disegnare il grafico del potenziale  $V(x)$ :



**Figura 3:** Grafico del potenziale  $V(x)$ .

Per Ljapunov, i punti di minimo sono stabili, quindi anche  $(x, \dot{x}) = (1, 0)$ . Invece il punto  $(x, \dot{x}) = (-1, 0)$  è un punto di massimo, quindi instabile.

Disegniamo le curve di livello, quindi, come abbiamo fatto negli altri esercizi:



**Figura 4:** Piano delle fasi dell'esercizio 3.

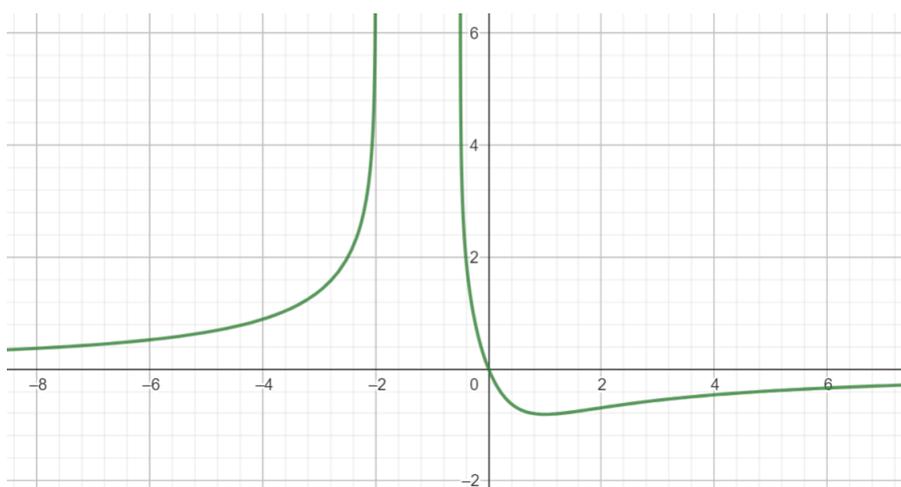
Cosa succede se  $\alpha \in \mathbb{R}$ ?

Notiamo che come prima cosa, al variare di  $\alpha$ , varierà il dominio. Infatti:

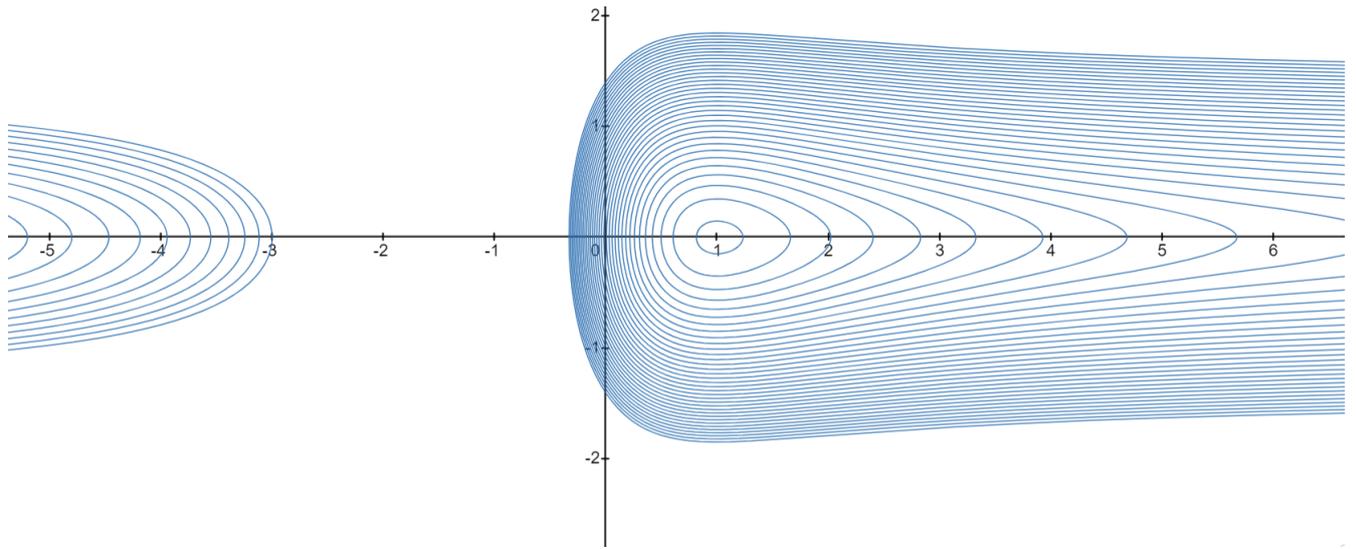
- se  $|\alpha| < 2$ , il dominio continua ad essere tutta la retta reale;
- se  $\alpha = 2$ , il dominio è  $\mathcal{D}(V(x)) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ;
- se  $\alpha = -2$ , il dominio è  $\mathcal{D}(V(x)) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ;
- se  $|\alpha| > 2$ , il dominio è  $\mathcal{D}(V(x)) = (-\infty, x_-) \cup (x_+, \infty)$  con  $x_{\pm}$  i due valori per cui si annulla il denominatore tali che  $x_- < x_+$ .

Studiamo separatamente i vari casi e notiamo che abbiamo diversi grafici in base al valore di  $\alpha$ . Qui di seguito mettiamo esempi qualitativi per i vari casi di  $\alpha$ :

**Caso  $\alpha > 2$**



**Figura 5:**  $V(x)$  con  $\alpha > 2$ .

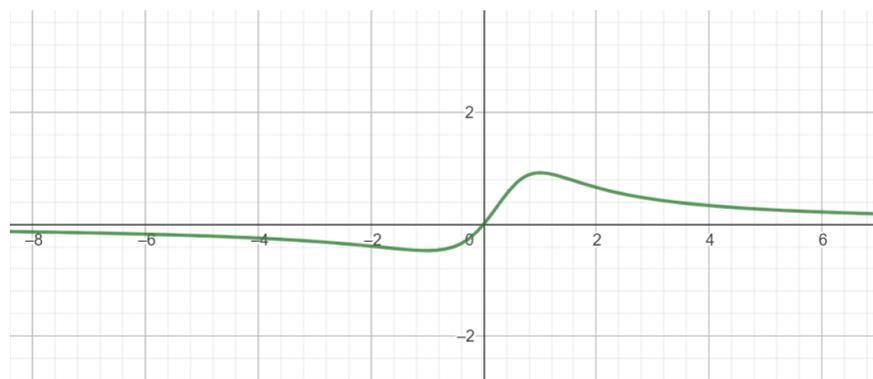


**Figura 6:** Piano delle fasi con  $\alpha > 2$ .

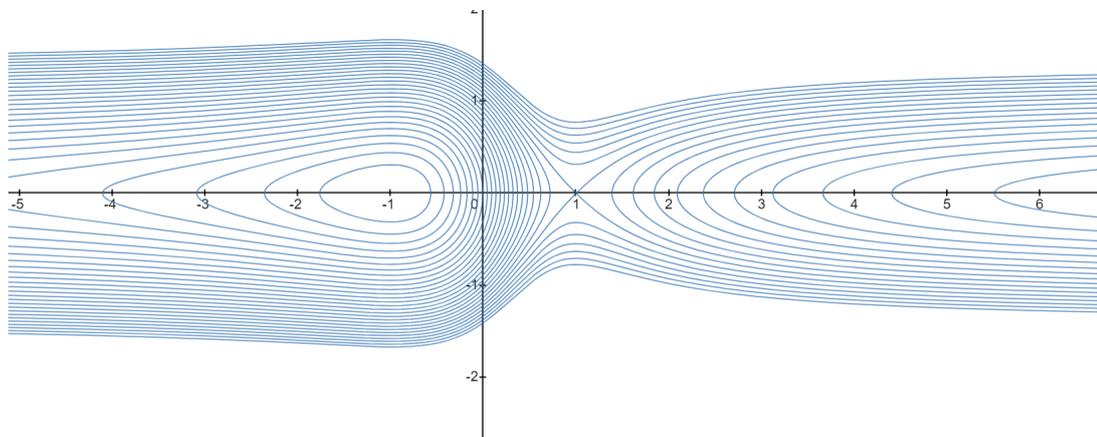
*Caso  $0 < \alpha < 2$*

*E' praticamente lo stesso studio di  $\alpha = 1$ .*

*Caso  $-2 < \alpha < 0$*

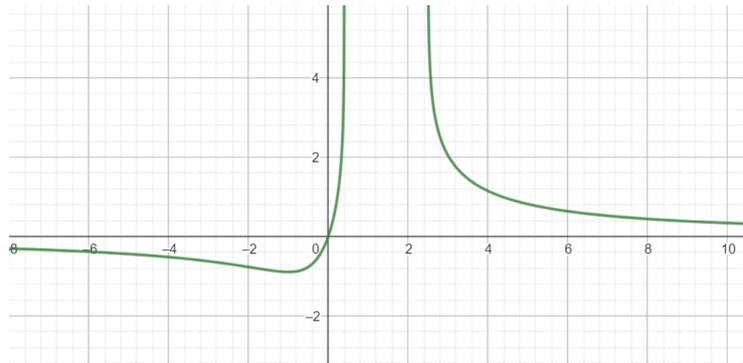


**Figura 7:**  $V(x)$  con  $\alpha > 2$ .

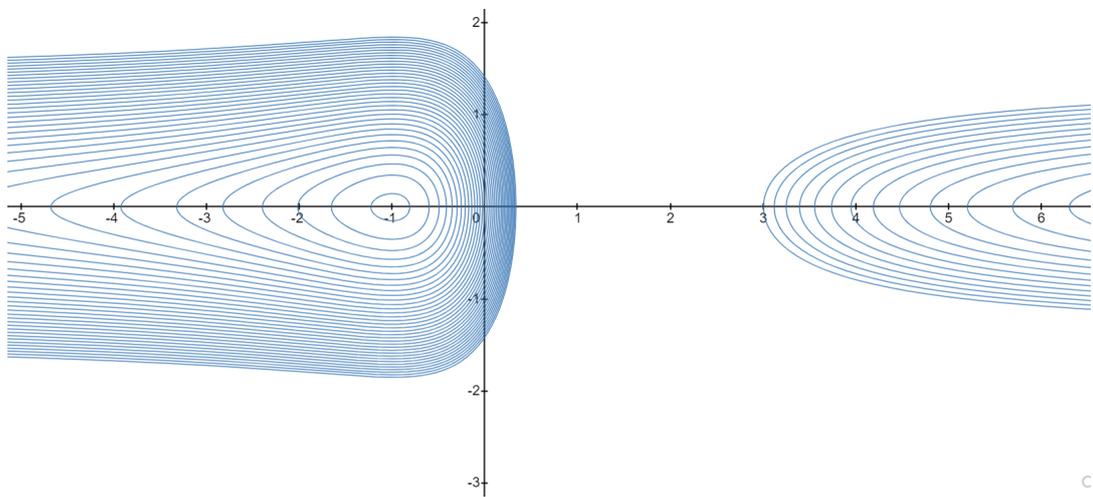


**Figura 8:** Piano delle fasi con  $-2 < \alpha < 0$ .

*Caso  $\alpha < -2$*

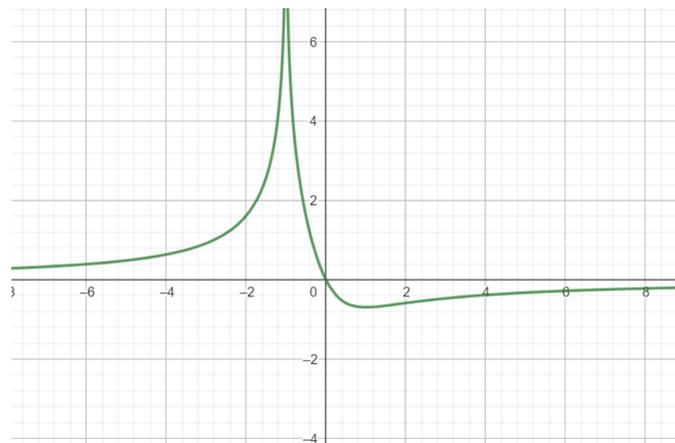


**Figura 9:**  $V(x)$  con  $\alpha > 2$ .

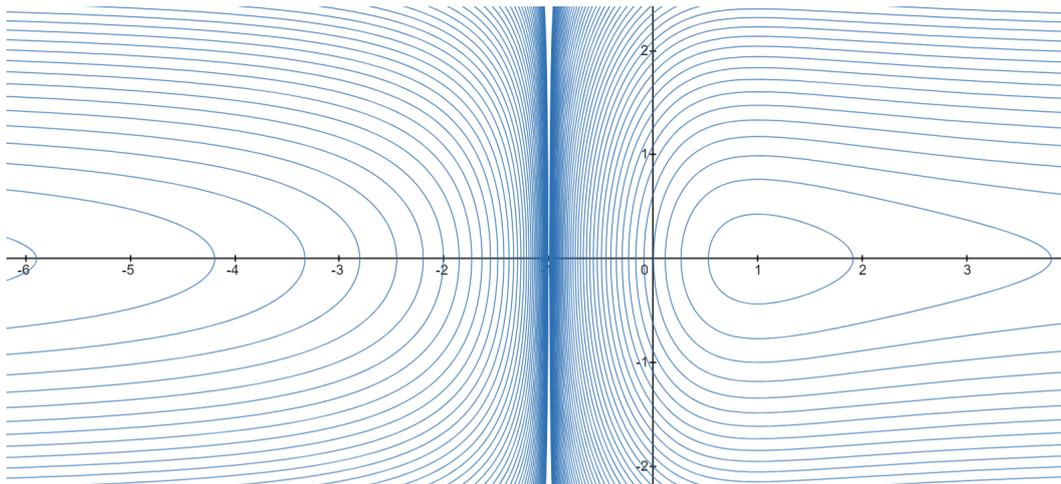


**Figura 10:** Piano delle fasi con  $-2 < \alpha < 0$ .

*Caso  $\alpha = 2$*

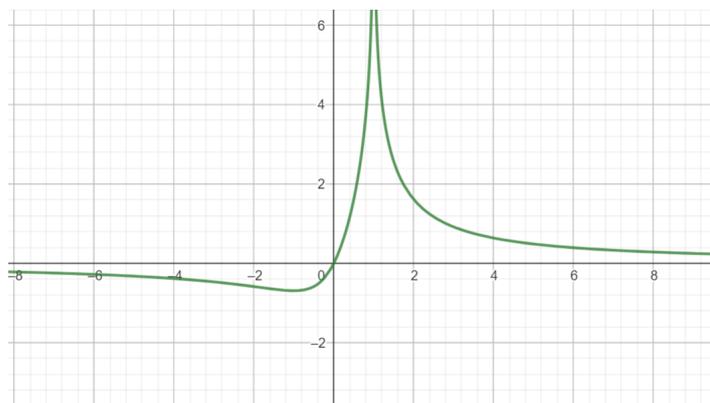


**Figura 11:**  $V(x)$  con  $\alpha > 2$ .

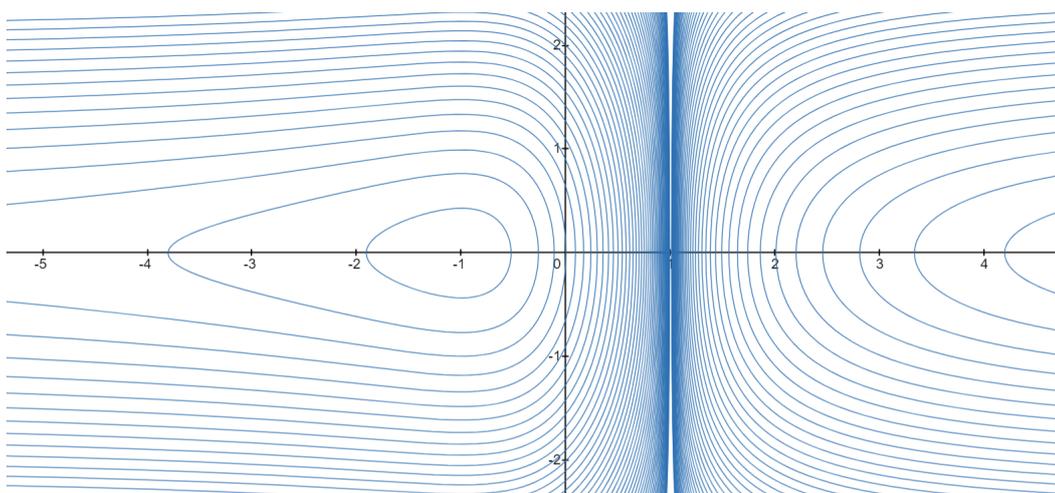


**Figura 12:** Piano delle fasi con  $-2 < \alpha < 0$ .

*Caso*  $\alpha = -2$



**Figura 13:**  $V(x)$  con  $\alpha > 2$ .



**Figura 14:** Piano delle fasi con  $-2 < \alpha < 0$ .

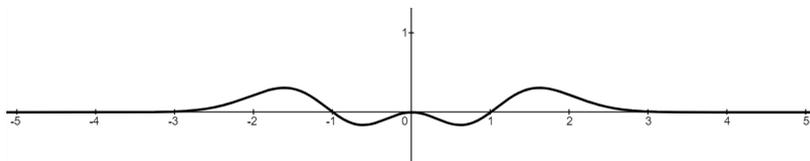
**Esercizio 4.** *Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di*

massa  $m = 1$  sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = e^{-x^2} x^2 (x^2 - \alpha)$$

1. Si consideri esplicitamente il caso  $\alpha = 1$

(a) Il grafico dell'energia potenziale  $V(x)$  per  $\alpha = 1$  è:



(b) Dato che il sistema considerato è un sistema meccanico conservativo, allora per il Teorema di Dirichlet/Lagrange i punti di equilibrio del sistema corrispondono ai punti  $(q_0, 0)$ , dove  $q_0$  è tale che  $V'(q_0) = 0$ .

Allora:

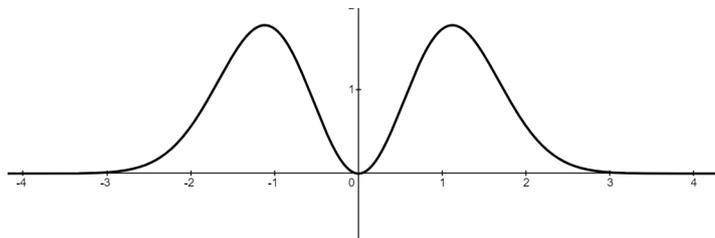
$$V'(x) = -e^{-x^2} (2x^5 - 6x^3 + 2x) = 0 \text{ se e soltanto se } x_1 = 0, x_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, x_{4,5} = \pm \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

(c) Calcolo la derivata seconda del potenziale nei punti stazionari del potenziale:

- $V''(0) < 0$  e quindi  $(0, 0)$  è pde Stabile;
- $V''(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}) > 0$  e quindi  $(\pm \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, 0)$  sono pde Instabili;  $(\pm \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, 0)$  sono pde Stabili;

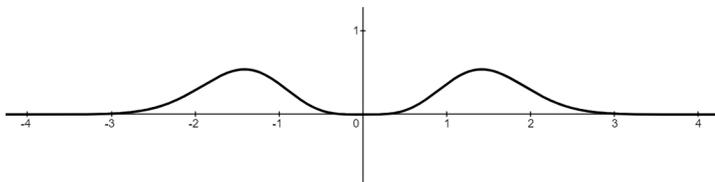
2. Al variare del parametro accade:

- Se  $\alpha < 0$



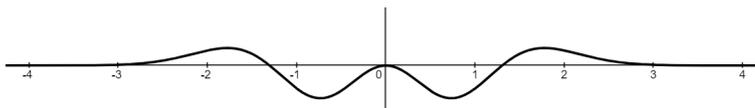
e in  $x = 0$  la funzione si comporta come  $-ax^2$  (Taylor)

- Se  $\alpha = 0$



e in  $x = 0$  la funzione si comporta come  $x^4$  (Taylor)

- Se  $\alpha > 0$



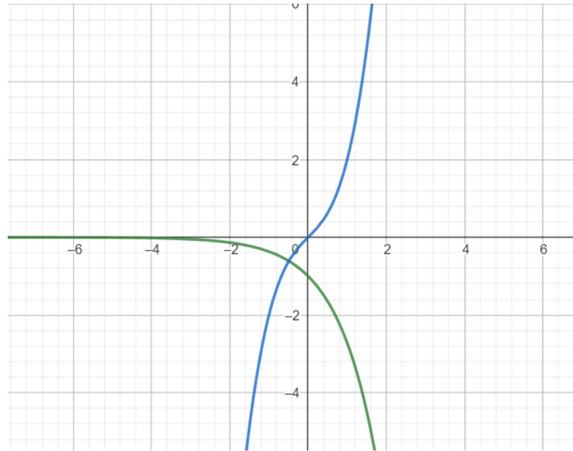
quindi ha un comportamento qualitativamente uguale a quello trattato per  $\alpha = 1$ .

**Esercizio 5.** Vediamo ora l'esercizio 5. Diamo uno sketch dell'esercizio, visto che le richieste sono simili agli altri esercizi. A differenza degli altri esercizi, però, non troveremo soluzioni esplicite per quanto riguarda i punti di equilibrio. Questo perché:

$$V'(x) = x^3 + \gamma x + e^x;$$

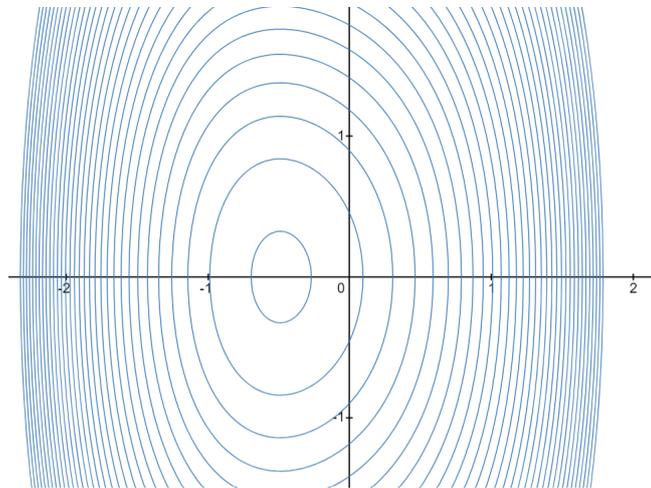
e studiare il segno di questa derivata non si può fare esplicitamente. Riusciremo a dire solamente quante sono le soluzioni per  $V'(x) = 0$  e se sono positive o negative. Proviamo a vedere i vari casi:

- $\gamma > 0$ . Studiamo  $g(x) = x^3 + \gamma x$ . Notiamo che è sempre crescente. Quindi  $g(x)$  si intersecherà con  $-e^x$  in un solo punto  $x_\gamma < 0$ .



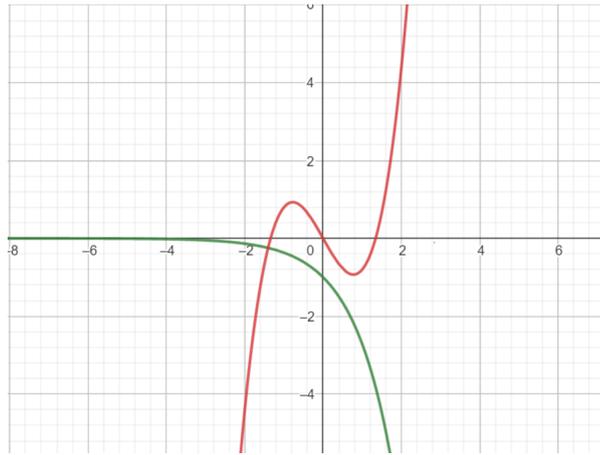
**Figura 15:** In verde  $-e^x$  e in celeste  $g(x)$ .

Abbiamo quindi un minimo nel punto  $x_\gamma$ . Il piano delle fasi, quindi, sarà

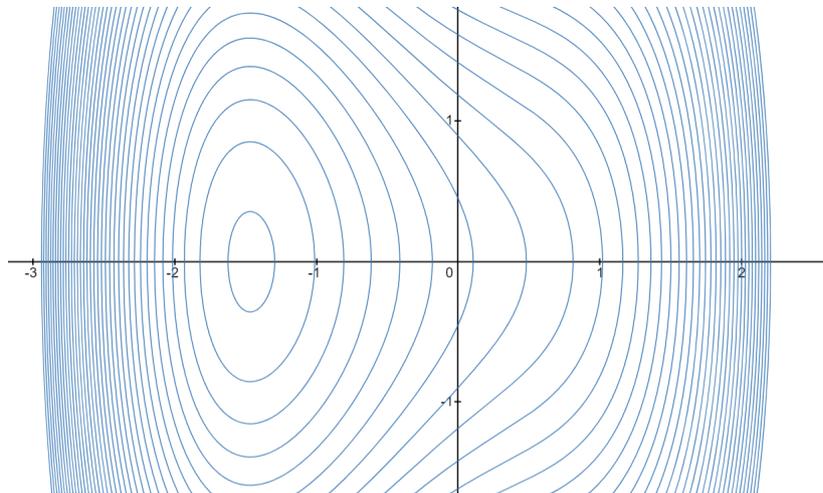


**Figura 16:** Piano delle fasi con  $\gamma > 0$ .

- $\gamma = 0$ : facciamo lo stesso studio ed arriviamo alla stessa configurazione di sopra;
- $\gamma < 0$ . Abbiamo tre sottocasi:
  1. Una sola intersezione.

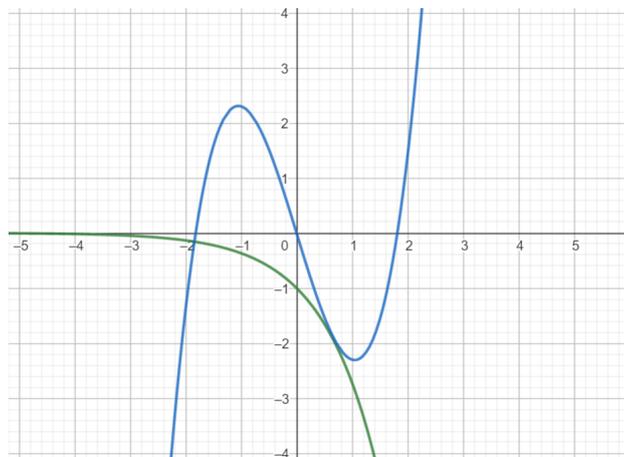


**Figura 17:** Intersezione in un solo punto.

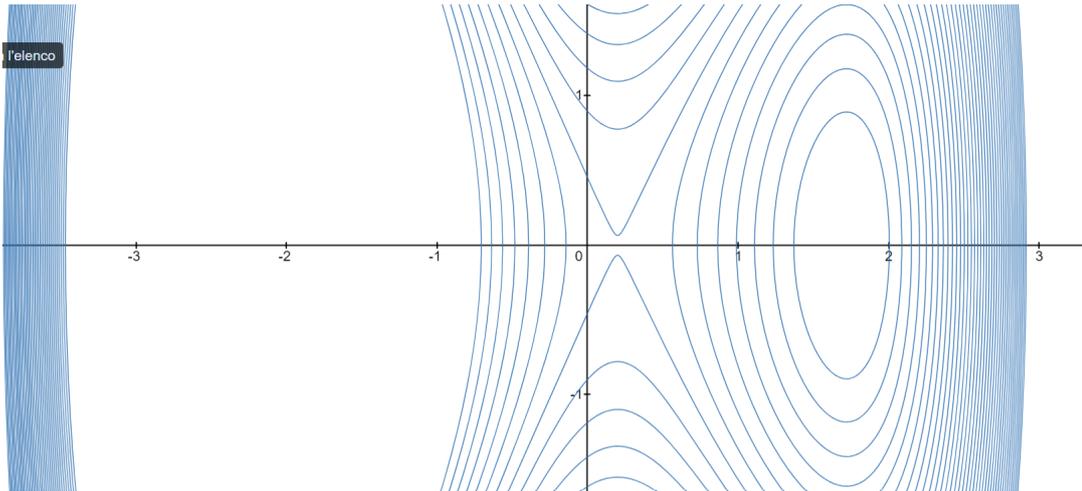


**Figura 18:** Piano delle fasi con  $\gamma > 0$ .

*2. Due intersezioni*

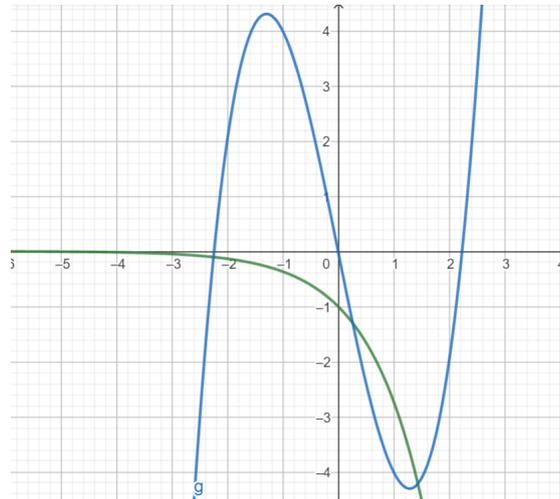


**Figura 19:** Intersezione in un solo punto.

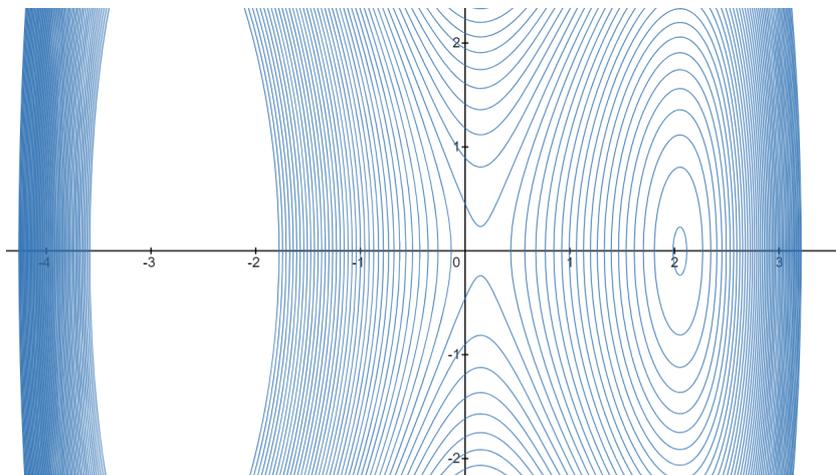


**Figura 20:** Piano delle fasi con  $\gamma > 0$ .

*3. Tre intersezioni*



**Figura 21:** Intersezione in un solo punto.



**Figura 22:** Piano delle fasi con  $\gamma > 0$ .

**Esercizio 6.** (BONUS) Si consideri il seguente sistema dinamico planare:

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x, y) \cdot \partial_y W(x, y) \\ \dot{y} = -g(x, y) \cdot \partial_x W(x, y) \end{cases} \quad \text{con } g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}), W \in \mathcal{C}'(I, \mathbb{R}) \text{ e } (x, y) \in \mathbb{R}^2, I \subset \mathbb{R}^2$$

1.  $W(x, y)$  è una costante del moto per il sistema, infatti:

$$\frac{d}{dt}W(x, y) = \partial_x W \cdot \dot{x} + \partial_y W \cdot \dot{y} = \partial_x W \cdot g(x, y) \cdot \partial_y W(x, y) + \partial_y W \cdot (-g(x, y) \cdot \partial_x W(x, y)) = 0$$

2. La funzione di Ljapunov candidata è  $\tilde{W}(x, y) := W(x, y) - W(x_0, y_0)$  dove  $(x_0, y_0)$  è un punto di equilibrio del sistema. In questo modo, per verificare se il punto è stabile basterà applicare il Teorema di Ljapunov alla funzione  $\tilde{W}(x, y)$ .

3. Si consideri il sistema di Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - By)x \\ \dot{y} = (Cx - D)y \end{cases} \quad \text{con } A, B, C, D \text{ costanti positive.}$$

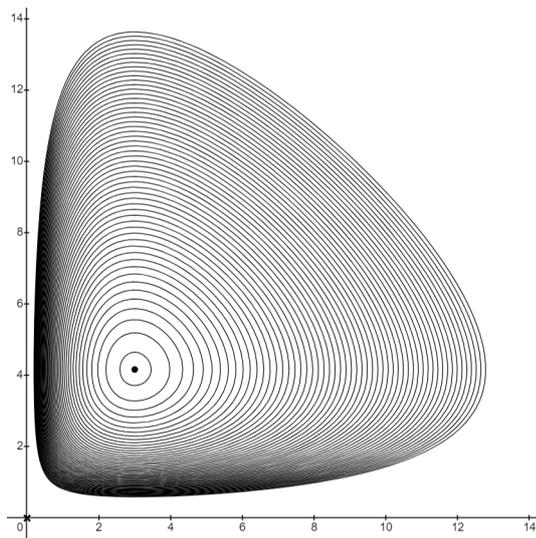
Appartiene alla classe dei sistemi descritti nell'esercizio, infatti basta prendere  $g(x, y) = xy$  e risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - By)x = xy \partial_y W(x, y) \\ \dot{y} = (Cx - D)y = -xy \partial_x W(x, y) \end{cases}$$

si trova immediatamente che:

$$W(x, y) = -D \ln x + Cx + By - A \ln y$$

Rappresento sul piano delle fasi le curve di livello in cui la funzione  $W(x, y)$  è costante (e quindi il moto è periodico):



- Il punto  $(0, 0)$  (indicato nel grafico con una  $x$ ) è instabile (nella direzione delle  $x$  il moto si svolge da sinistra verso destra, mentre nella direzione delle  $y$  il moto si svolge dall'alto verso il basso)
- Il punto  $(\frac{D}{C}, \frac{A}{B})$  è stabile, conseguenza del teorema di Ljapunov applicato alla funzione  $\tilde{W}(x, y)$ . (Non avrei potuto concludere nulla linearizzando attorno al punto).