FM210 Meccanica Analitica
Soluzioni Tutorato 3

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Lorenzo de Leonardis, Laura Fagotto

14/03/2024

Soluzione esercizio 1 Scriviamo le equazioni del sistema dinamico come segue

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 4x^3 - 10x \end{cases}$$

(3.2) **Simmetrie.** Osserviamo che $V(-x) = V(x)$ quindi il potenziale è simmetrico rispetto all'asse verticale.
Andamento all'infinito.

$$\lim_{x\to\pm\infty} V(x) = -\infty$$

Punti critici. $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 0$ per $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$. Inoltre $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} > 0$ per $x < -\sqrt{5/2}$ e per $0 < x < \sqrt{5/2}$, quindi $x = 0$ è un punto di minimo mentre $x = \pm\sqrt{5/2}$ sono punti di massimo del potenziale.
Grafico del potenziale.

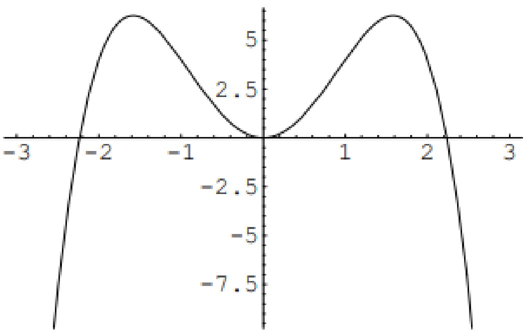


Figura 5: Grafico del potenziale $V(x)$ per $\alpha = 0$. Si noti che il valore di α indica semplicemente la posizione del potenziale rispetto all'asse x.

(3.3) **Punti d'equilibrio e stabilità.** Poiché si ha equilibrio per i punti $(x_0, 0)$ con x_0 punto critico di $V(x)$, per quanto visto al punto precedente, i punti d'equilibrio del sistema dinamico associato saranno

$$P_0 = (0,0) \qquad P_1 = \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, 0\right), \qquad P_2 = \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0\right)$$

Inoltre, dal teorema di Dirichlet sappiamo che i punti stabili sono tutti e soli i punti della forma $(x_0, 0)$ con x_0 punto di minimo del potenziale $V(x)$. Perciò avremo che P_0 è stabile mentre P_1 e P_2 sono instabili. Notiamo inoltre che $V(\sqrt{5/2}) = V(-\sqrt{5/2})$ e che $V''(x) \neq 0$, il che ci sarà utile nell'analisi del piano delle fasi.

(3.4) **Piano delle fasi.** Da $E = y^2/2 + V(x)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse x. Inoltre osserviamo che $inf_{x\in\mathbb{R}} V(x) = -\infty$ quindi il moto nel piano delle fasi è possibile per ogni valore dell'energia. In particolare avremo

- Per $E < V(0)$ due traiettorie aperte.
- Per $E = V(0)$ due traiettorie aperte e il punto d'equilibrio stabile P_0.
- Per $V(0) < E < V(\sqrt{5/2})$ una traiettoria periodica intornao a P_0 e due traiettorie aperte.
- Per $E = V(\sqrt{5/2})$ due traiettorie eterocline non-cuspidi, quattro traiettorie aperte e i puni instabili P_1 e P_2.
- Per $E > V(\sqrt{5/2})$ due traiettorie aperte, una tutta contenuta nel semipiano $y > 0$ e l'altra, simmetrica alla prima rispetto all'asse x.

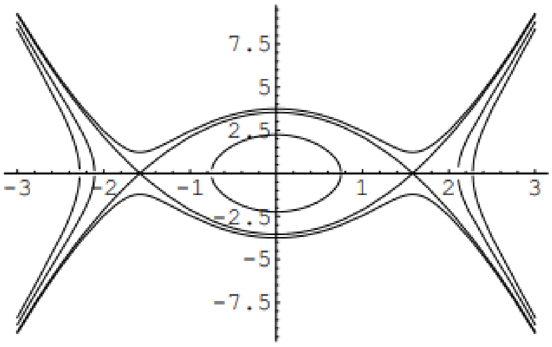


Figura 6: Grafico del piano delle fasi. Osserviamo che il valore di α è irrilevante nel piano delle fasi.

Versi di percorrenza. Da $y = \dot{x}$, sappiamo che il verso di percorrenza, nella direzione x sarà positivo nel semipiano in cui $y > 0$.

(3.5) **Traiettorie periodiche.** Per quanto visto al punto precedente abbiamo traiettorie periodiche per

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -\sqrt{5/2} < x < \sqrt{5/2}, \ V(0) < \frac{y^2}{2} + V(x) < V(\sqrt{5/2})\}$$

(3.6) **Esistenza di una traiettoria periodica.** Per $\alpha = 4$ abbiamo

$$V(x) = -(x^4 - 5x^2 + 4) = (x^2 - 1)(4 - x^2)$$

quindi $V(0) = -4$ e $V(\sqrt{5/2}) = 21/4$ perciò $-4 < E < 21/4$ e dunque, per quanto visto al punto precedente, esiste una traiettoria periodica a tale livello di energia.

(3.7) **Periodo come integrale definito.** Imponendo $V(x) = 0$ troviamo i punti $x = \pm 1$ e $x = \pm 4$. Affinché sia soddisfatta la condizione di esistenza della traiettoria periodica, deve valere $-\sqrt{5/2} < x < \sqrt{5/2}$, quindi i punti sulla traiettoria periodica sono $x_\pm = \pm 1$. Il periodo di tale traiettoria sarà quindi

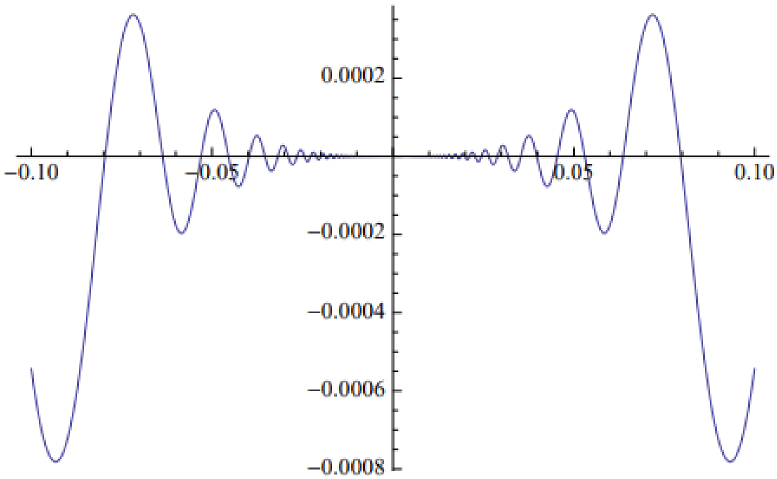
$$T = \sqrt{2} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}$$

Stima del periodo. Notiamo che $E - V(x) = -V(x) = (1 - x^2)(4 - x^2) = (x + 1)(1 - x)(4 - x^2)$ che è quindi della forma $(x - x_-)(x_+ - x)\phi(x)$ con $\phi(x) = 4 - x^2$ e inoltre $3 \leq \phi(x) \leq 4 \ \forall x \in [-1, 1]$ perciò una stima del periodo è data da

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} \leq T \leq \sqrt{\frac{2}{3}}\pi$$

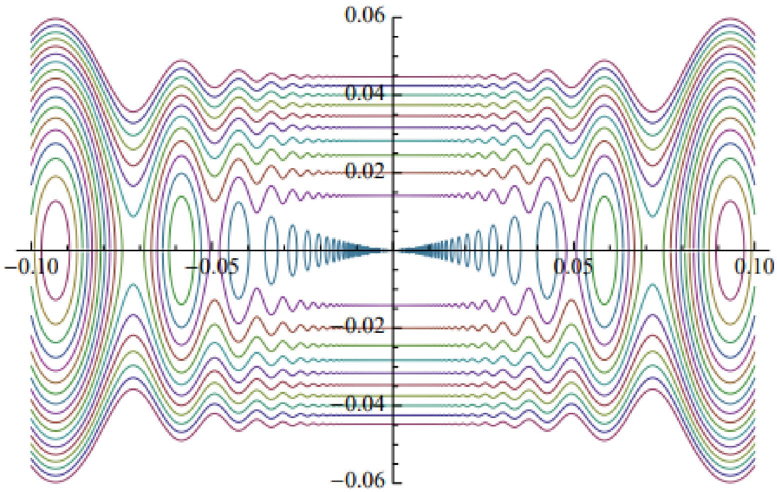
Soluzione esercizio 2

1 - Il grafico di $U(x)$ è



Le oscillazioni (e quindi i punti di equilibrio) si accumulano a 0.

2 - Quindi le traiettorie nel piano delle fasi sono dalla forma



3. - Ricordiamo la definizione della stabilità secondo Lyapunov: per ogni intorno I del punto di equilibrio sul piano delle fasi, trovo un intorno $I_0 \subseteq I$ tale che, scelto un qualsiasi dato iniziale in I_0, il moto corrispondente rimane in I per tutti i tempi $t \geq 0$. Dallo studio delle curve di livello, risulta che esistono curve di livello concentriche attorno all'origine piccole a piacere. Piú precisamente, scelta un'energia non critica positiva, la Σ_E corrispondente è costituita da varie componenti sconnesse, una sola delle quali contiene (strettamente) l'origine: chiamiamo questa $\tilde{\Sigma}_E$. Per $E < E_0$ entrambe non critiche, $\tilde{\Sigma}_E$ è completamente contenuta in $\tilde{\Sigma}_{E_0}$. Inoltre l'intera curva chiusa $\tilde{\Sigma}_E$ tende a zero nel limite $E \to 0_+$. La dimostrazione dettagliata di queste affermazioni viene lasciata al lettore, e segue dallo studio del grafico di Σ_E.

Dato I intorno di (0, 0) scegliamo allora I_0 come l'interno di una di queste $\tilde{\Sigma}_E$, con E così piccolo che I_0 sia contenuto in I. Per quanto discusso sopra questo è possibile. Essendo I_0 cosí scelto invariante lungo il moto, (i.e. (x(t), $\dot{x}$(t)) rimane in I_0 per tutti i tempi, se parte in I_0), segue la stabilità dell'origine.

Soluzioni esercizio 3

2. $V'(x) = \alpha x - \beta x^5 = x(\alpha - \beta x^4)$.
   Analizziamo cosa accade se una tra α o β è nulla. Se $\alpha = 0$ allora $V'(x) = -\beta x^5$ e quindi l'unico punto stazionario è $x = 0$ che è un massimo del potenziale se $\beta > 0$ e minimo se $\beta < 0$. Se $\beta = 0$ allora $V'(x) = \alpha x$ e quindi l'unico punto stazionario è $x = 0$ che è un massimo del potenziale se $\alpha < 0$ e minimo se $\alpha > 0$.
   Supponiamo quindi che nessuno dei due parametri sia nullo.
   $x = 0$ è uno zero della derivata del potenziale. Per gli altri zeri dobbiamo dividere 2 casi: Se $\alpha\beta < 0$ allora non ce ne sono altri (e quindi l'unico punto stazionario del potenziale è $x = 0$), mentre se $\alpha\beta > 0$ allora $x_\pm = \pm\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\beta}}$ sono altri due zeri della funzione. Vediamo quindi che tipo di punti stazionari sono:
   $V''(x) = \alpha - 5\beta x^4$. $V''(0) = \alpha$ e $V''(x_\pm) = -4\alpha$. Suddividiamo quindi in ulteriori due casi e otteniamo:

   - Se $\alpha, \beta > 0$ allora $x = 0$ è un minimo e $x_\pm$ massimi
   - Se $\alpha, \beta < 0$ allora $x = 0$ è un massimo e $x_\pm$ minimi.

   Quindi mettendo tutto assieme:

   - Se $\alpha = 0$ e $\beta > 0$, $(0,0)$ è un punto di equilibrio instabile.
   - Se $\alpha = 0$ e $\beta < 0$, $(0,0)$ è un punto di equilibrio stabile.
   - Se $\beta = 0$ e $\alpha < 0$, $(0,0)$ è un punto di equilibrio instabile.
   - Se $\beta = 0$ e $\alpha > 0$, $(0,0)$ è un punto di equilibrio stabile.
   - Se $\alpha > 0$ e $\beta < 0$ allora $(0,0)$ è stabile.
   - Se $\alpha < 0$ e $\beta > 0$ allora $(0,0)$ è instabile.
   - Se $\alpha, \beta > 0$ allora $(0,0)$ è stabile e $(x_\pm, 0)$ sono instabili.
   - Se $\alpha, \beta < 0$ allora $(0,0)$ è instabile e $(x_\pm, 0)$ sono stabili.

Caso I

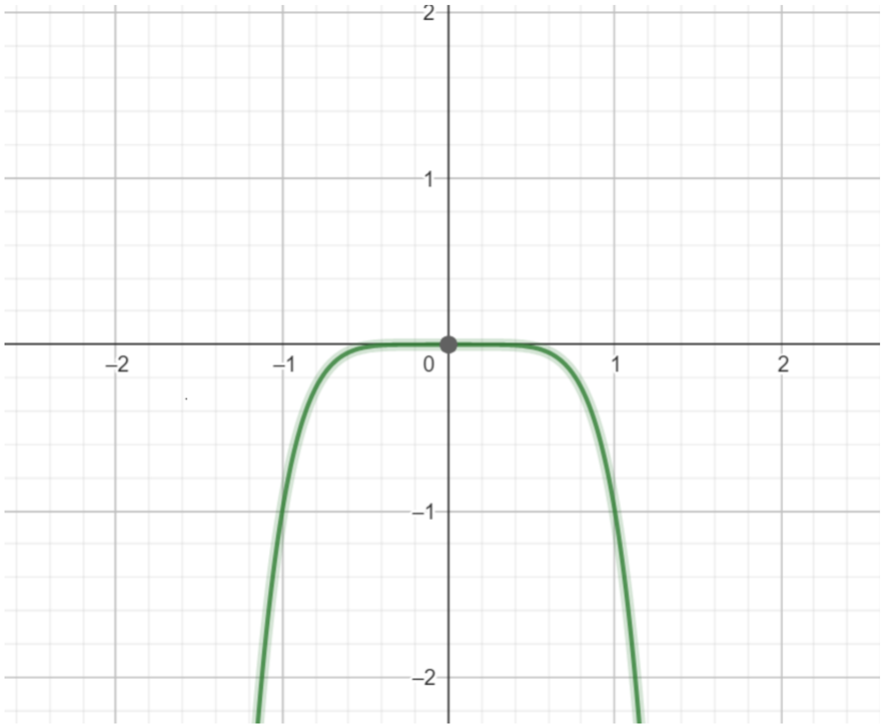


Figura 1: Potenziale caso I.

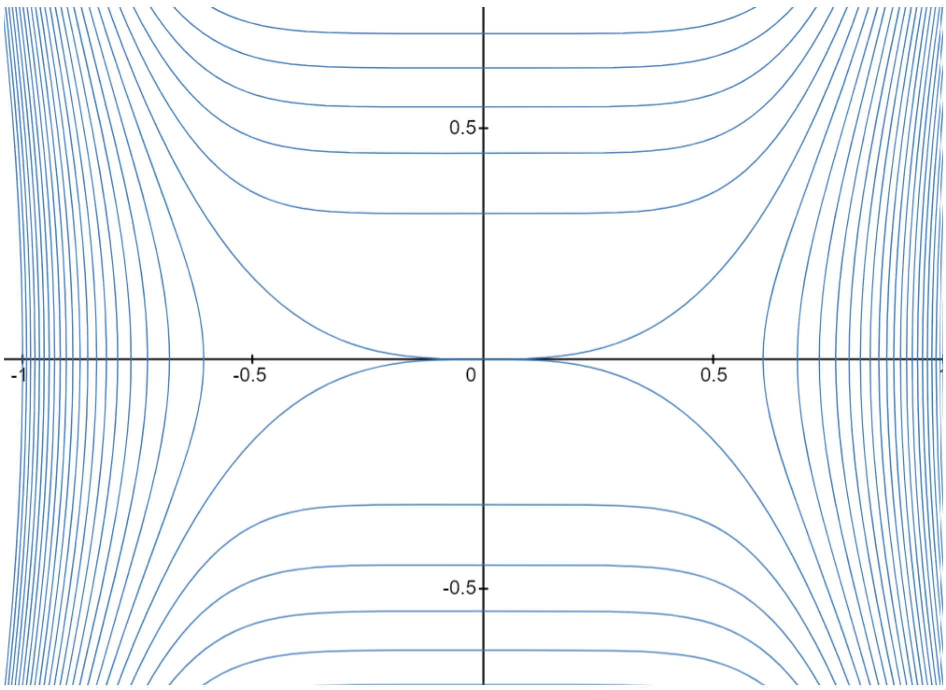


Figura 2: Piano delle fasi caso I.

Caso II

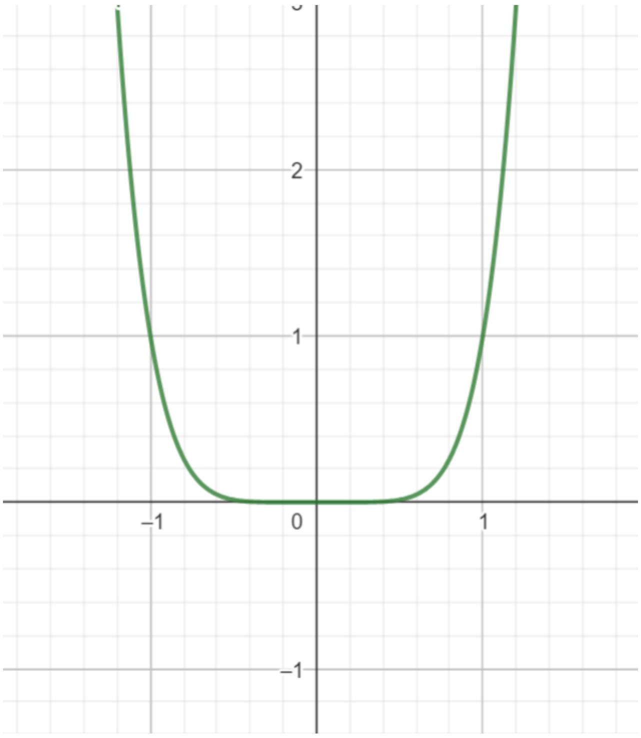


Figura 3: Potenziale caso II.

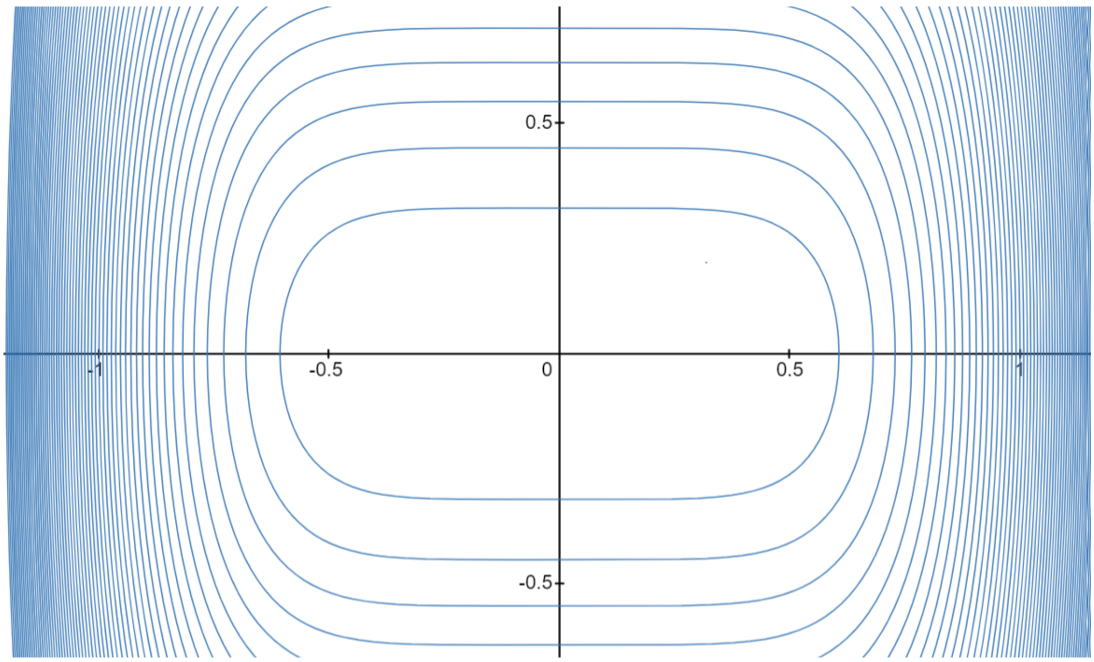


Figura 4: Piano delle fasi caso II.

Caso III e V
Qualitativamente come il caso I.

Caso IV e VI
Qualitativamente come il caso II

Caso VII

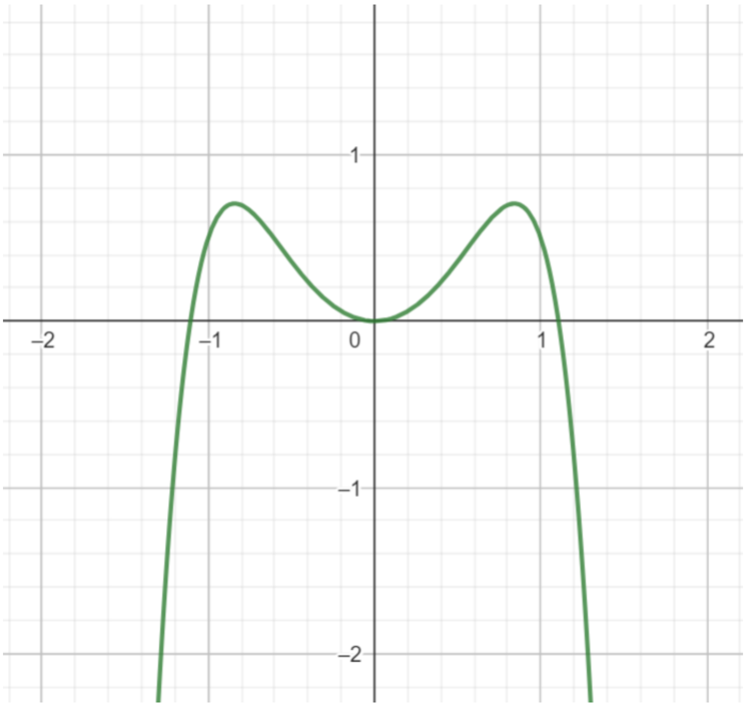


Figura 5: Potenziale caso VII.

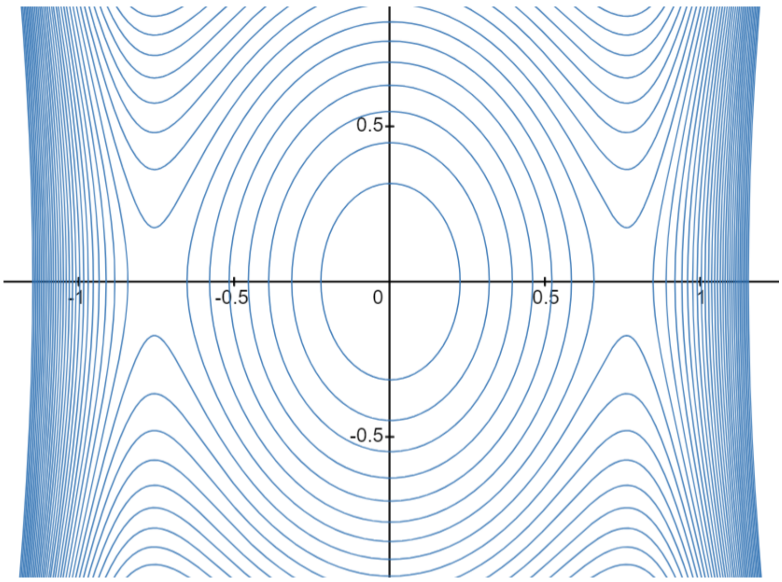


Figura 6: Piano delle fasi caso VII.

Caso VIII

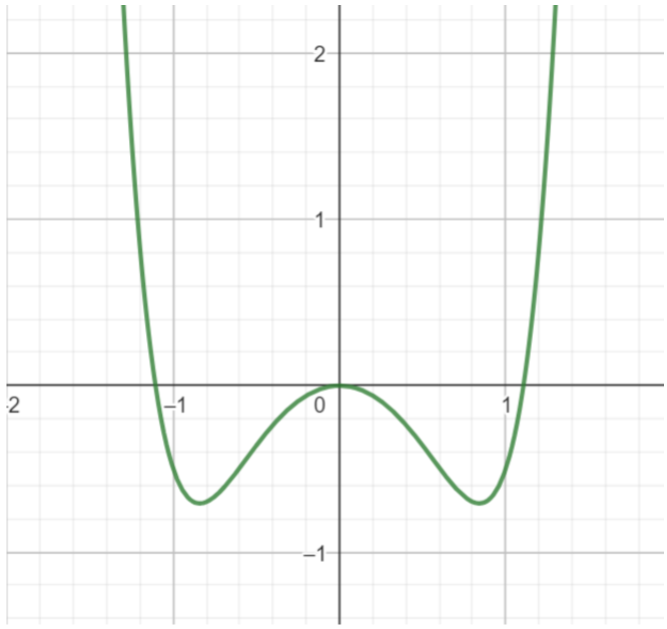


Figura 7: Potenziale caso VIII.

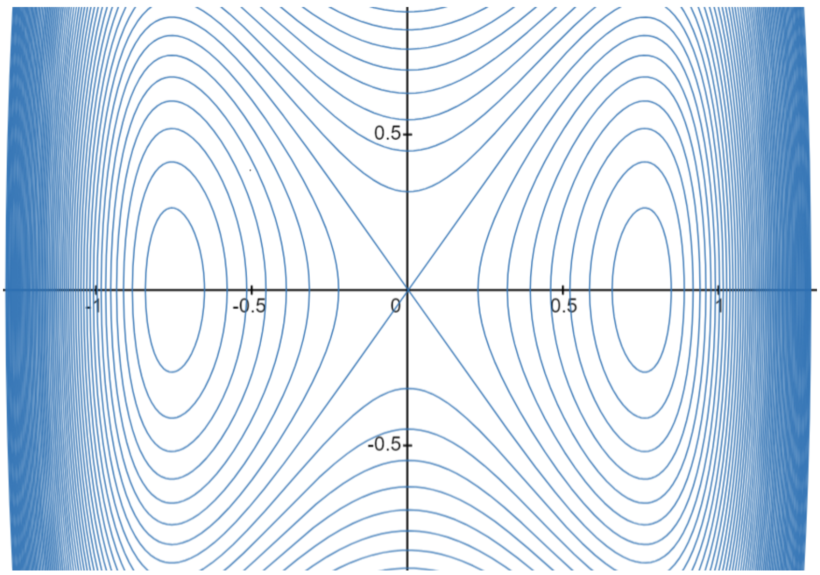


Figura 8: Piano delle fasi caso VIII.

4. La traiettoria con condizioni iniziali $(x(0), y(0)) = (0, 1)$ è periodica nei casi II, IV, V, VII (con l'aggiunta della condizione $\alpha > \beta$), VIII.

5. • Caso II: $\alpha = 0$ e $\beta < 0$. $V(x) = \frac{|\beta|}{6}x^6$. $E(1,0) = -\frac{|\beta|}{6}$ e $E(1,0) = -\frac{|\beta|}{6} = \frac{|\beta|}{6}x^6$ in $x = \pm 1$.

$$T = \sqrt{2}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{|\beta|}{6}(1-x^6)}}$$

• Caso IV: $\alpha > 0$ e $\beta = 0$. $V(x) = \frac{\alpha}{2}x^2$. $E(1,0) = -\frac{\alpha}{2}$ e $E(1,0) = -\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}x^2$ in $x = \pm 1$.

$$T = \sqrt{2}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{\alpha}{2}(1-x^2)}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}[\arcsin x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$$

• Caso V: $\alpha > 0$ e $\beta < 0$.

$$T = \sqrt{2}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{\alpha}{2} + \frac{|\beta|}{6} - \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{|\beta|}{6}x^6}}$$

• Caso VII: $\alpha > \beta > 0$.

$$T = \sqrt{2}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{6} - \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\beta}{6}x^6}}$$

• Caso VIII: $\alpha > 0$ e $\beta < 0$.

$$T = \sqrt{2}\int_{\sqrt[4]{\frac{|\beta|}{3\alpha}}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{\alpha}{2} + \frac{|\beta|}{6} - \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{|\beta|}{6}x^6}}$$

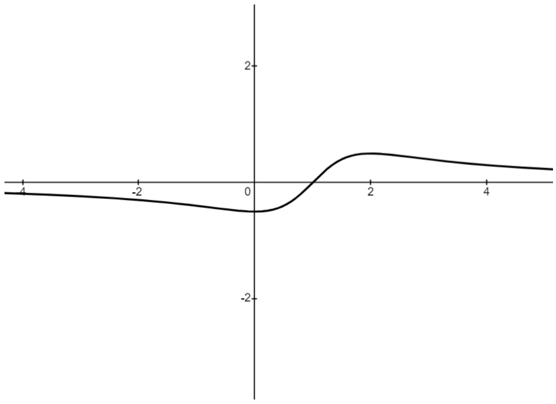
Soluzione esercizio 4 Si consideri il sistema meccanico unidimensionale conservativo descritto dalla seguente equazione:

$$\ddot{x} = \frac{ax^2 - 2x - 2a^2 + 2}{(x^2 - 2x + 2a)^2} \qquad \text{con } a > 0$$

Inoltre, si scelga l'energia potenziale in modo che $V(0) = -\frac{1}{2a}$

1. Si consideri esplicitamente il caso $a = 1$

   (a) Il grafico dell'energia potenziale $V(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 2x + 2}$ è il seguente:



(b) Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità; La derivata dell'energia potenziale si annulla nei punti:

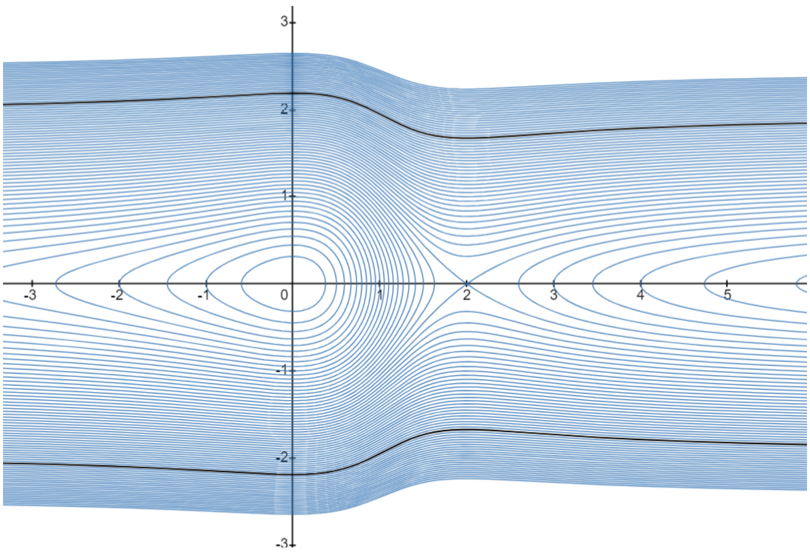
$$x_{1,2} = \frac{1}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{1 - 2a + 2a^3} \qquad a > 0$$

Quindi per $a = 1$ i punti stazionari di $V(x)$ sono:

$$x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 1$$

Ora $V''(0) > 0$ mentre $V''(1) < 0$ quindi posso concludere che il punto $(0, 0)$ è stabile, mentre il punto $(1, 0)$ è instabile.

(c) La rappresentazione sul piano piano delle fasi $(x, \dot{x})$ è la seguente:



Da cui segue che:

- Per $E = -\frac{1}{2}$ e $x(0) = 0$ il moto è fisso nel punto di equilibrio stabile;
- Per $\frac{1}{2} < E < 0$ e $x(0) \in [0, 1]$ il moto è chiuso e periodico;
- Per $E = 0$ il moto è aperto;
- Per $0 < E < \frac{1}{2}$ abbiamo due moti aperti;
- Per $E = \frac{1}{2}$ e $x(0) = 2$ abbiamo moti aperti asintotici al punto di equilibrio instabile;
- Per $E > \frac{1}{2}$ abbiamo moti aperti

Soluzione esercizio 5 (esercizio sui periodi, repetita iuvant) Si consideri il generico sistema meccanico unidimensionale newtoniano:

$$m\ddot{x} = -V'(x)$$

1. Sul libro [G1] Introduzione ai sistemi dinamici - Volume 1. Equazioni differenziali ordinarie, analisi qualitativa e alcune applicazioni
2. Sul libro [G1] Introduzione ai sistemi dinamici - Volume 1. Equazioni differenziali ordinarie, analisi qualitativa e alcune applicazioni
3. Dato che il periodo è:

$$T = 2\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

Allora:

$$T = 2\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = 2\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}((x - x_-)(x_+ - x)\phi(x))}}$$

E quindi verificando che:

$$\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{(x - x_-)(x_+ - x)}} = \pi$$

Si arriva facilmente alla tesi.

In generale se esistono due costanti $C_1, C_2 > 0$ tali che $C_1 \leq \phi(x) \leq C_2$ per ogni $x \in [x_-, x_+]$, allora utilizzando ragionamenti analoghi si arriva a dimostrare che una valida stima è:

$$\pi\sqrt{\frac{2m}{C_2}} \leq T \leq \pi\sqrt{\frac{2m}{C_1}}$$

4. La formula è la seguente:

$$L = 2\int_{x_-}^{x_+} \sqrt{1 + (\dot{y}(x))^2}\, dx$$

dove $y(x) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$

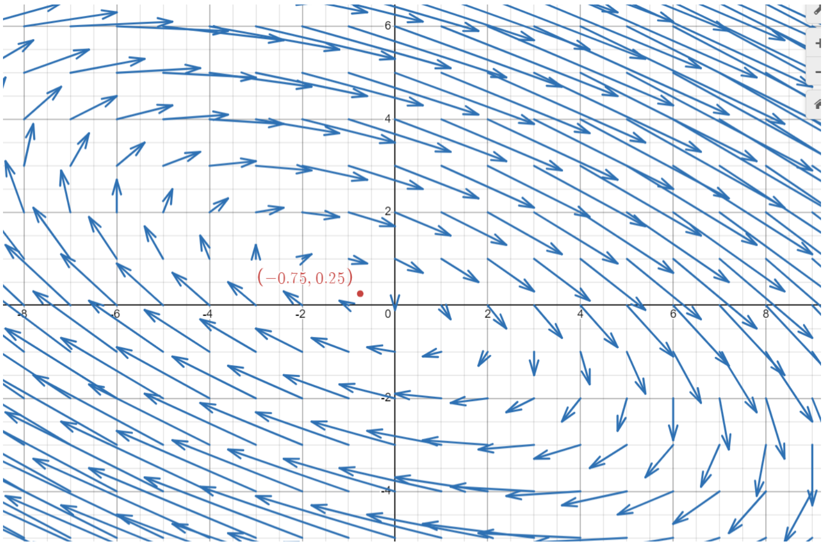
Soluzione esercizio 6 (BONUS) Si consideri il seguente sistema dinamico planare:

$$\begin{cases} \dot{x} = \partial_y W(x,y) \\ \dot{y} = -\partial_x W(x,y) \end{cases} \quad \text{con } W(x,y) = x^2 + 3y^2 + 2xy + x$$

1. $\frac{d}{dt}W(x(t), y(y)) = \dot{x}\partial_x W(x,y) + \dot{y}\partial_y W(x,y) = 0$, quindi $W(x,y)$ è una costante del moto per il sistema
2. I punti di equilibrio si trovano risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 0 = 6y + 2x \\ 0 = -(2x + 2y + 1) \end{cases}$$

L'unico punto di equilibrio è $(x_0, y_0) = (-\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ e grazie al teorema di Ljapunov è possibile concludere che è stabile.


(−0.75, 0.25)