FM210 Meccanica Analitica
Tutorato 4

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Lorenzo De Leonardis, Laura Fagotto

22/03/2024

"Attraverso un'analisi rigorosa, cercheremo di stabilire connessioni tra simmetrie e leggi di conservazione, aprendo così la strada a una comprensione più profonda dei principi fondamentali della fisica."

Emmy Noether

Esercizio 1. *Per un refuso, abbiamo messo lo stesso esercizio del tutorato precedente*

Esercizio 2. *Sia dato il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa* $m = 1$ *soggetta alla forza di energia potenziale*

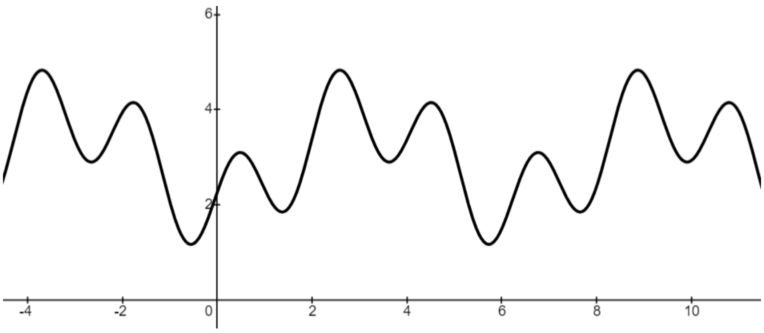
$$V(x) = (3 - \cos x) + \cos(3x + 5) \text{ con } x \in \mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

1. *Intanto osserviamo che la funzione* $V(x)$ *è periodica di periodo* $T = 2\pi$ *ed è positiva per ogni* $x \in \mathbb{R}$.

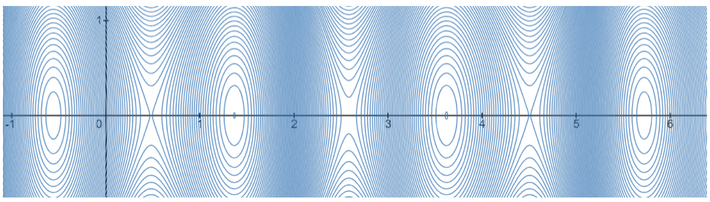
   Adesso per studiare gli eventuali punti stazionari, che equivale a studiare la seguente equazione $\sin x = 3\sin(3x + 5)$, *dobbiamo utilizzare il metodo grafico. Troveremo che esistono 6 punti stazionari, di cui 3 massimi e 3 minimi locali. Chiameremo* x_{M1}, x_{M2}, x_{M3} *i tre punti di massimo e* x_{m1}, x_{m2}, x_{m3} *i tre punti di minimo. Per questi punti vale la seguente proprietà:*

   $$0 < x_{M1} < \frac{\pi}{4} < x_{m1} < \frac{\pi}{2} < x_{M2} < \pi < x_{m2} < \frac{5\pi}{4} < x_{M3} < \frac{3\pi}{2} < x_{m3} < 2\pi$$

   Il grafico dell'energia potenziale $V(x)$ *è il seguente:*



2. *Grafico delle curve di livello sul piano delle fasi:*



3. *Intanto calcoliamo l'energia valutata nel dato inziale* $(x, \dot{x}) = (-\frac{5}{2} + 2\pi, 0)$:

$$E(x,\dot{x}) = E((-\tfrac{5}{2}+2\pi,0)) = 3$$

Notiamo, studiando qualitativamente il grafico dell'energia potenziale che per energie $V(x_{m2}) < E < V(x_{M3})$ *ho delle traiettorie periodiche, e inoltre* $V(x_{m2}) < 3 < V(x_{M3})$.

4. *Il periodo è come al solito:*

$$T = 2\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}} = 2\int_{-\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\pi}^{-\frac{5}{2}+2\pi} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(3-(3-\cos(x)+\cos(3x+5))}}$$

Per darne una stima basta applicare la proposizione 29.2 [G1] ed utilizzare come costanti C_1 *e* C_2 *le seguenti quantità:*

$$C_1 = \min\{\phi(x) : x\in[-\tfrac{5}{4}+\tfrac{3}{2}\pi, -\tfrac{5}{2}+2\pi]\} \text{ e } C_2 = \max\{\phi(x) : x\in[-\tfrac{5}{4}+\tfrac{3}{2}\pi, -\tfrac{5}{2}+2\pi]\}$$

dove $\phi(x)$ *è tale che* $E-V(x) = (x-(-\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\pi))((-\frac{5}{2}+2\pi)-x)\phi(x)$ *per ogni* $x\in[-\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\pi, -\frac{5}{2}+2\pi]$

Esercizio 3. *(esercizio 3) Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa* $m=2$ *su* $\mathbb{R}$

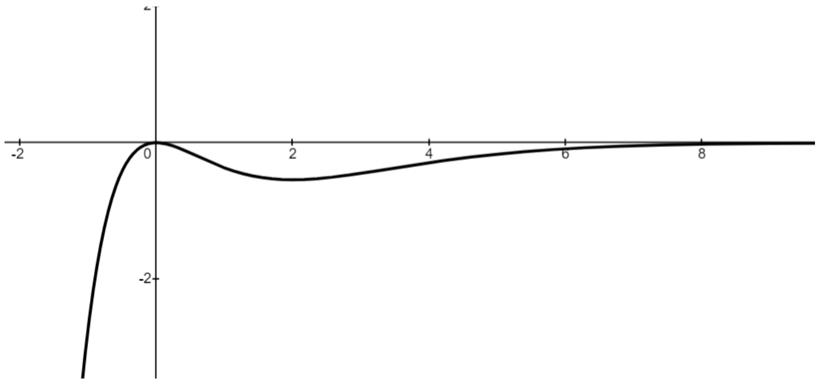
$$m\ddot{x} = e^{-x}(2x-x^2)$$

Si risponda alle seguenti domande.

1. *Il sistema dinamico associato è:*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{1}{m}V'(x) = \dfrac{e^{-x}(2x-x^2)}{m} \end{cases}$$

2. *L'energia potenziale, risolta tramite integrazione, è:* $V(x) = -x^2e^{-x}$ *e il grafico è:*

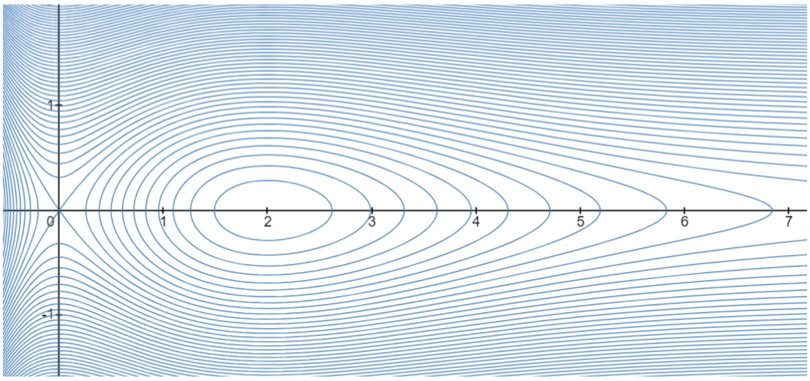


3. *I punti di equilibrio sono:* $(0,0)$ *e* $(2,0)$

   Infatti $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,2$. *Ora dato che* $V''(0) < 0$ *allora* $(0,0)$ *è un punto di equilibrio instabile, mentre dato che* $V''(2) > 0$ *allora* $(2,0)$ *è un punto di equilibrio stabile.*

4.

5. *Grafico delle curve di livello sul piano delle fasi:*



6.
- *Per $E < V(2)$ abbiamo un moto aperto;*
- *Per $E = V(2)$ abbiamo un moto aperto e un moto fisso, corrispondente al punto d'equilibrio $(2, 0)$;*
- *Per $V(2) < E < V(0)$ abbiamo un moto aperto ed un moto chiuso e periodico;*
- *Per $E = V(0)$ abbiamo il punto instabile $(0, 0)$ e una traiettoria omoclina al punto instabile;*
- *Per $E > V(0)$ abbiamo due moti aperti.*

7. *Dalle analisi appena fatte segue che esiste una traiettoria periodica per $E = -\frac{1}{4}$.*

Esercizio 4. *Come sopra, abbiamo che $V_{eff}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2\rho^2}$; quindi l'equazione del moto diventa:*

$$\ddot{\rho} = -V'_{eff}(\rho) = \rho^3 - 2 + \frac{L^2}{\rho^4}.$$

Vogliamo studiare i punti di stabilità, se ce ne sono, quindi studiamo la derivata prima e, ponendo $V'_{eff}(\rho) \geq 0$ si ha che

$$\rho^6 - 2\rho^3 + L^2 \geq 0.$$

In base al valore di L, distnguiamo tre casi:

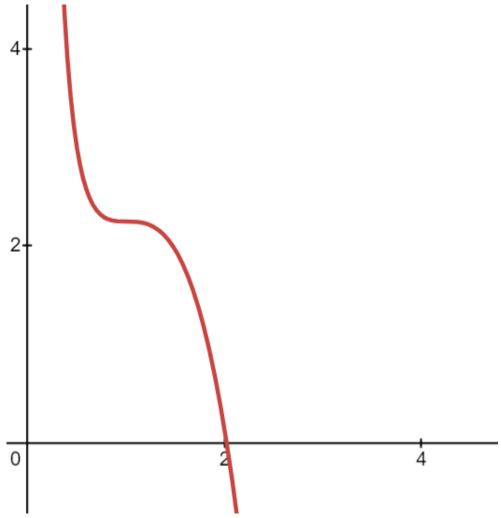
1. *$|L| > 1$: in questo caso $V'_{eff}(\rho) < 0$ per ogni ρ positivo, quindi $V_{eff}(\rho)$ è strettamente crescente e non ha punti di stabilità;*

2. *$|L| = 1$: in questo caso c'è un punto di flesso (punto instabile) in $\rho = 1$;*

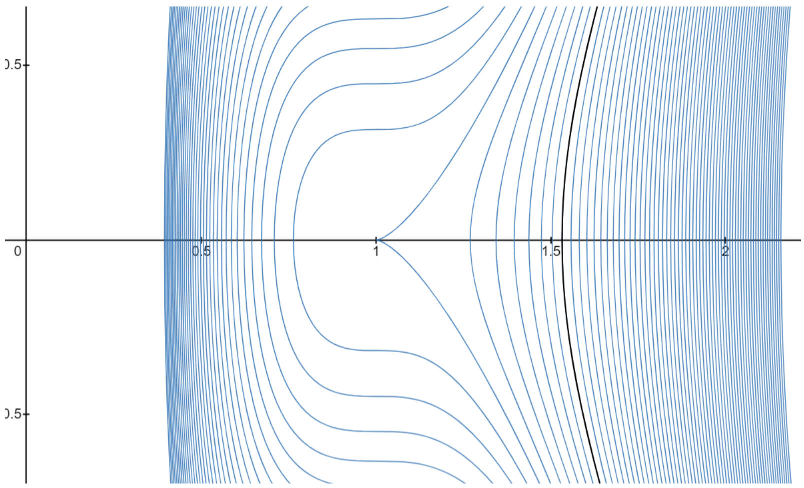
3. *$|L| < 1$: in questo caso ci sono due punti $\rho_- = \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - L^2}}$ (punto di massimo, quindi instabile) e $\rho_+ = \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - L^2}}$ (punto di minimo, quindi stabile).*

Riportiamo le varie richieste dell'esercizio tramite grafici:

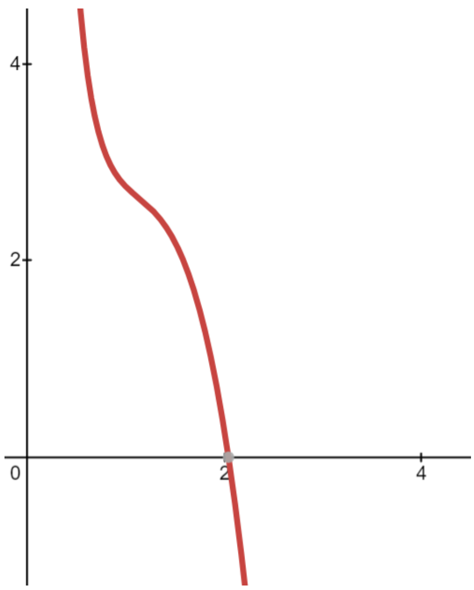
CASO 1: Grafico



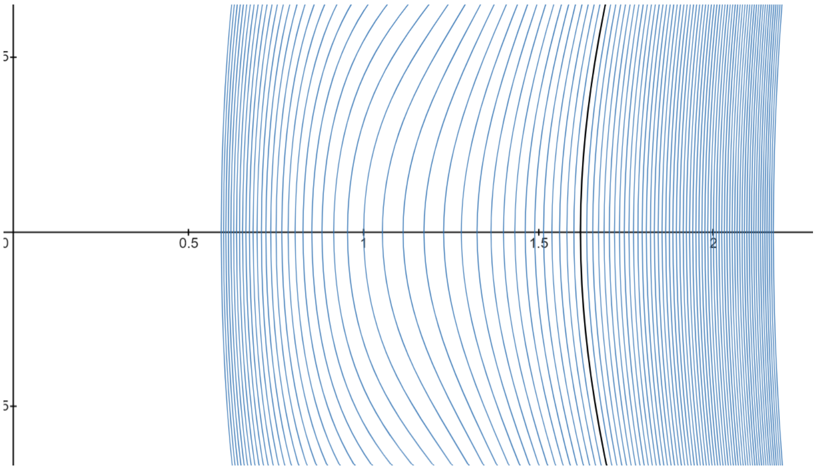
CASO 1: Piano delle fasi



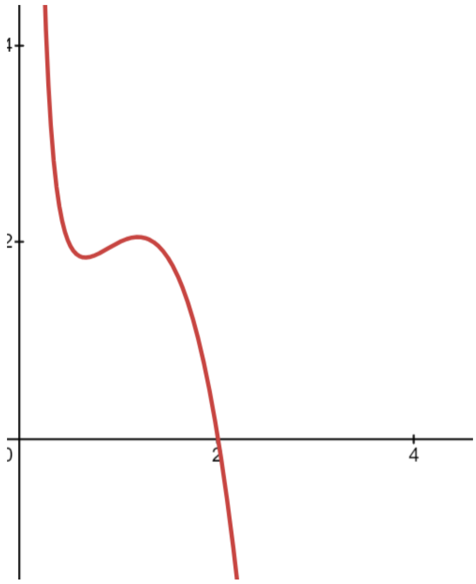
CASO 2 : Grafico



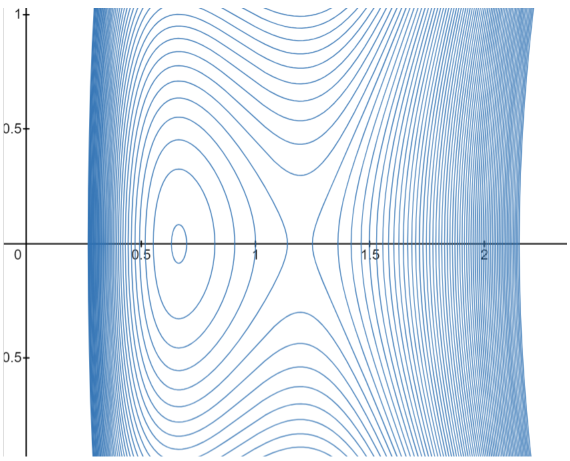
CASO 2: Piano delle fasi



CASO 3 : Grafico



CASO 3: Piano delle fasi



Esercizio 5. *(Bonus) Dati tre vettori $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, il vettore $x \wedge (y \wedge z)$ e lo scalare $x \cdot (y \wedge z)$ prendono rispettivamente i nomi di prodotto triplo vettoriale e prodotto misto o prodotto triplo scalare*

1. *Soluzione:*

$$\mathbf{y} \wedge \mathbf{z} = \begin{pmatrix} y_2z_3 - z_2y_3 \\ y_3z_1 - z_3y_1 \\ y_1z_2 - z_1y_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) = \begin{pmatrix} x_2(y_1z_2 - z_1y_2) - x_3(y_3z_1 - z_3y_1) \\ x_3(y_2z_3 - z_2y_3) - x_1(y_1z_2 - z_1y_2) \\ x_1(y_3z_1 - z_3y_1) - x_2(y_2z_3 - z_2y_3) \end{pmatrix}$$

   Sommando e sottraendo nella prima componente $x_1z_1y_1$, nella seconda componente $x_2z_2y_2$ e nella terza $x_3z_3y_3$ otteniamo:

$$\begin{pmatrix} (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)y_1 - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)z_1 \\ (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)y_2 - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)z_2 \\ (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)y_3 - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)z_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \wedge \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \begin{pmatrix} y_2z_3 - z_2y_3 \\ y_3z_1 - z_3y_1 \\ y_1z_2 - z_1y_2 \end{pmatrix} = x_1y_2z_3 - x_1z_2y_3 + x_2y_3z_1 - x_2z_3y_1 + x_3y_1z_2 - x_3z_1y_2$$

   Riordinando i termini:

$$y_1x_3z_2 - y_1x_2z_3 + y_2x_1z_3 - y_2x_3z_1 + y_3x_2z_1 - y_3x_1z_2 = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} \wedge \mathbf{x}$$

2. *Analogamente per la seconda disuguaglianza.*

3. *Soluzione del terzo punto:*

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{L} &= \ddot{\mathbf{r}} \wedge (\mu\ddot{\mathbf{r}} \wedge \dot{\mathbf{r}}) = (\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mu\mathbf{r} - (\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mu\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}} = \\ &= (\mu\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - (\mu\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r})\dot{\mathbf{r}} = (\frac{F(|\mathbf{r}|\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - (\frac{F(|\mathbf{r}|\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \cdot \mathbf{r})\dot{\mathbf{r}} = \\ &= \frac{F(|\mathbf{r}|\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}[(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\dot{\mathbf{r}}] = \frac{F(\rho)}{\rho}(\rho\dot{\rho}\mathbf{r} - \rho^2\dot{\mathbf{r}}) = F(\rho)(\dot{\rho}\mathbf{r} - \rho\dot{\mathbf{r}}) \end{aligned}$$