FM210 Meccanica Analitica
Soluzione Tutorato 6

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Lorenzo De Leonardis, Laura Fagotto

12/04/2024

"Uno degli strumenti più importanti della fisica è il cestino della carta straccia."
Richard Phillips Feymann

Esercizio 1. *(es1) Dato un sistema di riferimento $k = Oxyz$ (sistema di riferimento fisso) si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ la cui origine O' si muove lungo l'equazione*

$$y = x^2(x+1)(x+2)$$

La componente lungo l'asse x del vettore che individua il punto O' varia secondo la legge oraria $x_{O'}(t) = t$. L'asse ξ di K si mantiene parallelo all'asse z di k mentre l'asse ξ di K si mantiene sempre tangente alla curva $y = y(x)$. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove nel sistema K lungo una circonferenza di centro O' e raggio $R = 1$ secondo la legge $\xi(t) = \cos 2t$.

- *Il vettore che individua O' nel sistema k è dato da*

$$r(t) = (t, t^2(t+1)(t+2), 0)$$

mentre la rotazione può essere rappresentata da una matrice della forma

$$B = B^{(3)} = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $\theta(t)$ è tale che $\tan\theta(t) = \dot{y_{O'}}$. Poiché $y_{O'}(t) = t^2(t+1)(t+2)$ avremo che $\dot{y_{O'}} = 4t^3 + 9t^2 + 4t$ e perciò $\theta(t) = \arctan(4t^3 + 9t^2 + 4t)$. Quindi la trasformazione rigida è data da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t^2(t+1)(t+2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

- *Poiché P si muove in K lungo una circonferenza, la legge del moto in K sarà semplicemente $Q(t) = (\xi(t), \eta(t), \zeta(t)) = (\cos(2t), \sin(2t), 0)$.*

Per ottenere la legge del moto in k basterà applicare la trasformazione D a Q, ottenendo quindi

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t^2(t+1)(t+2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \cos(\theta(t) + 2t) \\ t^2(t+1)(t+2) + \sin(\theta(t) + 2t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

- *Sappiamo che la velocità assoluta è $v = \dot{q}$, e quindi basta semplicemente derivare il vettore che individua P nel sistema k ottenendo*

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1-(2+\dot{\theta}(t))\sin(\theta(t)+2t) \\ \tan(\theta(t))+(2+\dot{\theta}(t))\cos(\theta(t)+2t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$\dot{\theta}(t) = \frac{12t^2+18t+4}{1+(4t^3+9t^2+4t)^2}$$

Derivando poi il vettore che individua P nel sistema K, otteniamo

$$\dot{\mathbf{Q}} = (-2\sin 2t, 2\cos 2t, 0)$$

perciò la velocità relativa è data da

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} -2\sin(\theta(t)+2t) \\ 2\cos(\theta(t)+2t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

- *Da* $v_0 = \dot{r}$ *troviamo* $v_0 = (1, 4t^3+9t^2+4t, 0) = (1, \tan\theta(t), 0)$
- *Sappiamo che* $v_T = \omega \wedge (q-r)$, *con* $|\omega| = \dot{\theta}$. *D'altra parte, poiché l'asse di rotazione del sistema è parallelo all'asse z di k, avremo* $\omega(t) = (0, 0, \dot{\theta(t)})$. *Da ciò otterremo quindi:*

$$v_T = (-\dot{\theta(t)}\sin(\theta(t)+2t), \dot{\theta(t)}\cos(\theta(t)+2t), 0)$$

Sappiamo che la forza centrifuga $F_{cf} = -\mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{Q})$ dove $\mathbf{\Omega} = B\omega$ e quindi, nel nostro caso $\mathbf{\Omega} = \omega$. Perciò otteniamo

$$F_{cf} = (\dot{\theta}^2(t)\cos 2t, \dot{\theta}^2(t)\sin 2t, 0) = \dot{\theta}^2(t)\mathbf{Q}(t)$$

Sapendo che la forza di Coriolis è $F_{cor} = -2(\mathbf{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}})$, troviamo che

$$F_{cor} = (4\dot{\theta}(t)\cos 2t, 4\dot{\theta}(t)\sin 2t, 0) = 4\dot{\theta}(t)\mathbf{Q}(t)$$

Esercizio 2. *(es3) Dato un sistema di riferimento $k = Oxyz$ (sistema di riferimento fisso) si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ la cui origine O' si muove nel piano (x, y) lungo l'equazione $y = x^2$ in modo tale che la sua componente lungo l'asse x del vettore che individua il punto O' varia secondo la legge oraria $x_{O'}(t) = \sin t$. L'asse ζ di K si mantiene parallelo all'asse z di k mentre l'asse ξ di K si mantiene sempre tangente alla curva $y = y(x)$. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove nel sistema K lungo l'asse ξ con legge oraria $\xi(t) = t$.*

Il vettore che individua O' nel sistema k è dato da

$$r(t) = (\sin t, \sin^2 t, 0)$$

mentre la rotazione può essere rappresentata da una matrice della forma

$$B = B^{(3)} = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $\theta(t)$ è tale che $\tan\theta(t) = \dot{y_{O'}}$.
$\theta(t) = \arctan(2\sin t)$. *Quindi la trasformazione rigida è data da:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{(3)} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} + r(t)$$

Quindi

$$q = B^{(3)} \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r(t) = \begin{pmatrix} t\cos\theta(t) + \sin t \\ t\sin\theta(t) + \sin^2 t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v = \dot{q} = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) - t\dot{\theta}\sin\theta(t) + \cos t \\ \sin\theta(t) + t\dot{\theta}\cos\theta(t) + \sin 2t \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \dot{\theta}(t) = \tfrac{2\cos t}{1+4\sin^2 t}$$

$$v' = B\dot{Q} = (\cos\theta(t), \sin\theta(t), 0), \ v_0 = \dot{r} = (\cos t, \sin 2t, 0)$$

Ed infine

$$v_t = \omega \wedge (q - r) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ t\cos\theta & t\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = (-t\dot{\theta}\sin\theta, t\dot{\theta}\cos\theta, 0)$$

Con questi dati è possibile calcolare anche le rimanenti forze di Coriolis e centrifuga, usando le formule viste a lezione.

Esercizio 5 (BONUS)

1. Dal lemma 34.9 [G] sappiamo che $Aq = a \wedge q$ e dall'osservazione 33.10 [G] sappiamo che $a = (-A_{23}, A_{13}, A_{12}) = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = \Omega$. Quindi riscrivo $\Omega \wedge \dot{Q} = A\dot{Q}$ usando come $q = Q$ e riscrivo $\Omega \wedge (\Omega \wedge Q) = A(\Omega \wedge Q) = A^2 Q$ usando prima $\Omega \wedge Q$ come vettore q e poi Q.

2. Dall'esercizio 3 sappiamo che $\ddot{Q} = F - 2A\dot{Q} - A^2 Q$. Cerchiamo una soluzione della forma $Q = Ux$ dove $U = U(t)$ è una matrice da fissare. Si ha $\dot{Q} = \dot{U}x + U\dot{x}$ e $\ddot{Q} = \ddot{U}x + 2\dot{u}\dot{x} + U\ddot{x}$, così che l'equazione diventa:

$$\ddot{U}\mathbf{x} + 2\dot{U}\dot{\mathbf{x}} + U\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F} + 2A\dot{U}\mathbf{x} + 2AU\dot{\mathbf{x}} + A^2 U\mathbf{x} = 0$$

Imponiamo che i termini con $\dot{\mathbf{x}}$ scompaiano dall'equazione, cioè che $2\dot{U}\dot{\mathbf{x}} + 2AU\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ Questo implica

$$\dot{U} + AU = 0 \Rightarrow U = e^{-At}U(0)$$

dove $U(0)$ è una matrice arbitraria che per semplicità porremo fissare $U(0) = \mathbb{I}$. Usando il fatto che $\dot{U} = -AU$, e quindi $\ddot{U} = A^2 U$, l'equazione per $\mathbf{x}$ si semplifica notevolmente e si riduce a $U\ddot{x} - \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Osservando che U è invertibile, poiché $(e^{-At})^{-1} = e^{At}$ segue l'asserto.

Esercizio 3. *Si consideri il sistema meccanico descritto dall'equazione*

$$\ddot{x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4}.$$

1. *Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.*
2. *Studiare il grafico dell'energia potenziale.*
3. *Determinare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.*
4. *Analizzare qualitativamente il piano delle fasi* $(x, \dot{x})$.
5. *Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche e verificare in particolare che esiste una traiettoria periodica ad energia* $E = -\frac{3}{8}$.
6. *Scrivere il periodo* T *come integrale definito e darne una stima.*

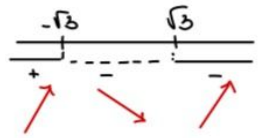
$\boxed{\text{Esercizio 3}}$

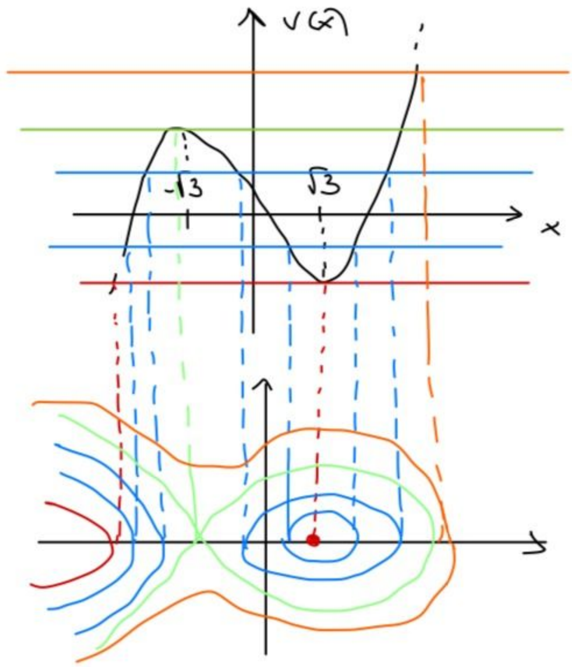
$\ddot{x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} = -V'(x)$

Facciamo il disegno del potenziale:

$\Rightarrow V(x) = \int \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4} dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}$

$V'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4} = \frac{x^2-3}{x^4} \geq 0 \iff x \geq \sqrt{3} \text{ e } x \leq -\sqrt{3}$





$x = \sqrt{3}$ è un pto di minimo $\Rightarrow$ stabile

$x = -\sqrt{3}$ è un pto di massimo $\Rightarrow$ instabile

Se chiamiamo $M := V(-\sqrt{3})$, $m = V(\sqrt{3})$,

Abbiamo orbite periodiche per $m \leq E < M$. In particolare

$E = -\frac{3}{8} < 0$ $\Rightarrow$ per $E = -\frac{\sqrt{3}}{8}$ c'è orbita periodica.

$\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1-3}{3\sqrt{3}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

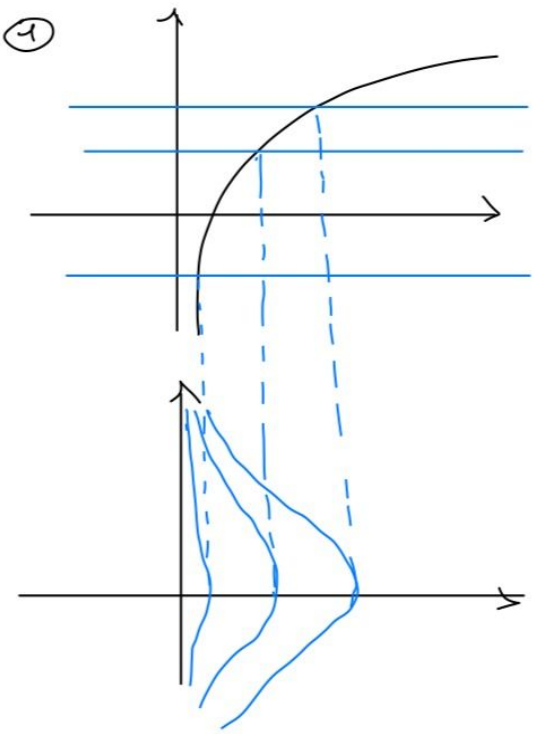
potenziale

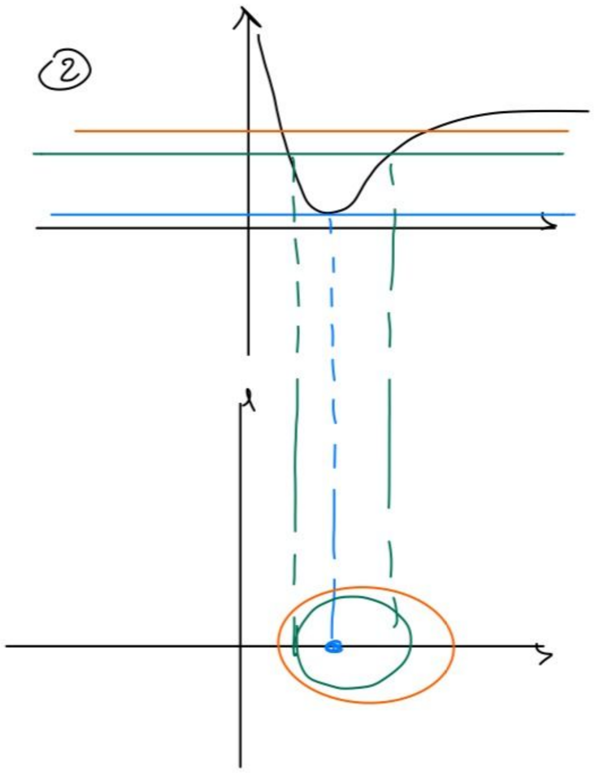
$$V(\rho) = \log\left(\frac{3\rho^2+2}{2\rho}\right)$$

1. *Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.*
2. *Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.*
3. *Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale efficace.*
4. *Analizzare qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot\rho)$.*
5. *Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot\rho)$.*

Studiare $V(\rho) = \log\left(\frac{3\rho^2+2}{2\rho}\right) + \frac{L^2}{2\rho^2}$ come abbiamo sempre fatto.

Due casi:





Nel caso ① non abbiamo orbite periodiche.

Nel caso ① abbiamo solo traiettorie periodiche.