# FM210 Meccanica Analitica
# Soluzioni Tutorato 7


Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Francesco Caristo, Laura Fagotto


03/05/2024

**Esercizio 1.** *Come prima cosa disegnamo il modello:*

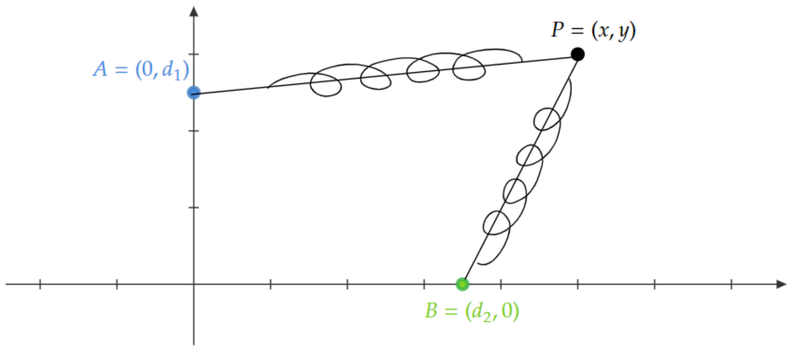


**Figura 1:** Modello dell'esericizio.

*e scriviamo la lagrangiana del sistema usando le cordinate* $(x, y)$ *del punto* $P$*:*

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k\left((d_2 - x)^2 + y^2\right) - \frac{1}{2}k\left(x^2 + (y - d_1)^2\right).$$

*Una volta scritta la lagrangiana del sistema, possiamo scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange:*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -kx - k(x - d_2), \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -ky - k(y - d_1);$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y};$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -kx - k(x - d_2) \\ m\ddot{y} = -ky - k(y - d_1) \end{cases} .$$

**Esercizio 2**

Ricordiamo che la Lagrangiana è definita come: $\mathcal{L} = T - U$ dove $T$ è l'energia cinetica e $U$ è il potenziale. Cominciamo con riscriverci le coordinate $x_{1,m}$ e $x_{2,m}$ del punto di massa $m$ in termini delle coordinate $x$ e $\theta$:

$$\begin{cases} x_{1,m} = (\ell + x)\sin\theta \\ x_{2,m} = (\ell + x)\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{1,m} = \dot{x}\sin\theta + (l + x)\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{x}_{2,m} = \dot{x}\cos\theta - (l + x)\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_{1,m}^2 + \dot{x}_{2,m}^2) = \frac{1}{2}m[(\dot{x}\sin\theta + (\ell+x)\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (\dot{x}\cos\theta - (\ell+x)\dot{\theta}\sin\theta)^2] = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + (\ell+x)^2\dot{\theta}]$$

Notiamo che il corpo di massa $m$ è soggetto sia alla forza peso che alla forza elastica:

$$\Rightarrow U = U_{el} + U_{grav} = \frac{1}{2}kx^2 - mg(\ell + x)\cos\theta$$

Pertanto la Lagrangiana sarà:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + (\ell + x)^2\dot{\theta}^2] - \frac{1}{2}kx^2 + mg(\ell + x)\cos\theta$$

Da cui:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = m(\ell + x)\dot{\theta}^2 - kx + mg\cos\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mg(\ell + x)\sin\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m(\ell + x)^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 2m(\ell + x)\dot{x}\dot{\theta} + m(\ell + x)^2\ddot{\theta}$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono quindi:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = m(\ell + x)\dot{\theta}^2 - kx + mg\cos\theta \\ 2(\ell + x)\dot{x}\dot{\theta} + (\ell + x)^2\ddot{\theta} = -g(\ell + x)\sin\theta \end{cases}$$

**Esercizio 3** Procediamo al calcolo delle derivate della lagrangiana:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1}(q, \dot{q}) = -\dot{q_2} - 2q_2 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2}(q, \dot{q}) = \dot{q_1} - 2q_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q_1}}\right) = \frac{d}{dt}(q_2) = \dot{q_2} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q_2}}\right) = \frac{d}{dt}(-q_1) = -\dot{q_1}$$

Se imponiamo $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q_i}}$ otteniamo

$$\begin{cases} \dot{q_2} = -q_2 \\ \dot{q_1} = q_1 \end{cases}$$

la cui soluzione è $q(t) = (q_1(t), q_2(t)) = (q_1(0)e^t, q_2(0)e^{-t})$. Per come sono scritte le equazioni del moto, si verifica facilmente che $H(q_1, q_2) = q_1 q_2$ è una costante del moto.

**Esercizio 4** Il punto $P$ ha coordinate $(\cos\varphi, \sin\varphi)$, mentre il punto $Q$ ha coordinate $(2, y)$. Derivando e facendo la norma di tali vettori otteniamo che

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

Per quanto riguarda il potenziale, abbiamo il contributo gravitazionale e quello elastico:

$$V = mg\sin\varphi + mgy + \frac{1}{2}k(\cos\varphi - 2)^2 + \frac{1}{2}k(\sin\varphi - y)^2$$

$$= mg\sin\varphi + mgy + \frac{1}{2}k - 2k\cos\varphi - ky\sin\varphi + 2k + \frac{1}{2}ky^2$$

dove possiamo eliminare le costanti poiché la Lagrangiana è definita a meno di derivata totale. Perciò scriviamo

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mg\sin\varphi - mgy + 2k\cos\varphi + ky\sin\varphi - \frac{1}{2}ky^2$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{cases} m\ddot{y} = -mg - ky + k\sin\varphi \\ m\ddot{\varphi} = -mg\cos\varphi - 2k\sin\varphi + ky\cos\varphi \end{cases}$$

Le configurazioni di equilibrio, coincidono con i punti critici del potenziale, ossia, nei punti che azzerano i termini di destra delle equazioni soprascritte. Per $\varphi = \frac{\pi}{2}$, il termine di destra della seconda equazione è uguale a $-2k \neq 0$, dunque non abbiamo nessuna configurazione d'equilibrio. Studiamo il sistema in assenza di gravità, cioè $g = 0$. Le equazioni divengono

$$\begin{cases} m\ddot{y} = -ky + k\sin\varphi \\ m\ddot{\varphi} = -2k\sin\varphi + ky\cos\varphi \end{cases}$$

Per trovare i punti di equilibrio imponiamo

$$\begin{cases} -ky + k\sin\varphi = 0 \\ -2k\sin\varphi + ky\cos\varphi = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = \sin\varphi \\ 2y + y\cos\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} y = \sin\varphi \\ y = 0 \quad \vee \quad 2 + \cos\varphi = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \sin\varphi = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Quindi le soluzioni $(y, \varphi)$ (modulo $2\pi$ per la $\varphi$) sono $(0,0)$ e $(0,\pi)$. Determiniamo la natura dei punti critici, indicando con $H$ l'Hessiana del potenziale:

$$H = \begin{pmatrix} k & -k\cos\varphi \\ -k\cos\varphi & 2k\cos\varphi + ky\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Valutiamo nei punti critici

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \qquad H(0,\pi) = \begin{pmatrix} k & k \\ k & -2k \end{pmatrix}$$

La prima è definita positiva e la seconda è indefinita, concludiamo dunque che $(0,0)$ è un minimo del potenziale e $(0,\pi)$ è un punto di sella, quindi $(0,0)$ è una configurazione d'equilibrio stabile e $(0,\pi)$ è una configurazione d'equilbrio instabile.

**Esercizio 5** Sia $q(x) = (x, x^2)$ la posizione del punto $P$, allora $\dot{q} = (\dot{x}, 2x\dot{x})$ e pertanto

$$T = \frac{1}{2}m|\dot{q}|^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + 2mx^2\dot{x}^2$$

Nel potenziale avremo 3 contributi: gravitazionale, elastico e centrifugo.

$$V = mgx^2 + \frac{1}{2}k(x^2 + x^4) - \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

Pertanto la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + 2mx^2\dot{x}^2 - mgx^2 - \frac{1}{2}k(x^2 + x^4) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

La corrispondente equazione di Eulero-Lagrange è

$$m\ddot{x}(1 + 4x^2) = -4mx\dot{x}^2 + m\omega^2x - kx(1 + 2x^2) - 2mgx$$

Per determinare le configurazioni d'equilibrio studiamo i punti critici del potenziale:

$$V'(x) = 0 \iff 2mgx + kx(1+2x^2) - m\omega^2 x = 0 \iff x = 0 \quad \vee \quad 2mg + k(1+2x^2) - m\omega^2 = 0$$

$$\iff x = 0 \quad \vee \quad 2kx^2 = m\omega^2 - 2mg - k$$

$$\iff x = 0 \quad \vee \quad x = \sqrt{\frac{m\omega^2 - 2mg - k}{2k}} \quad \vee \quad x = -\sqrt{\frac{m\omega^2 - 2mg - k}{2k}}$$

dove ovviamente le due radici sono ben definite solo se $m\omega^2 \geq 2mg+k$ e nel caso valga l'uguale coincidono con lo 0 e dunque studieremo tale caso separatamente. Nel caso $m\omega^2 < 2mg+k$ invece l'origine è l'unico punto critico. Per determinare la natura dei punti critici calcoliamo la derivata seconda

$$V''(x) = 2mg + k + 6kx^2 - m\omega^2$$

Studiamo separatamente i vari casi:

- $m\omega^2 > 2mg + k$:

$$V''(0) = 2mg + k - m\omega^2 < 0$$

$$V''\left(\sqrt{\frac{m\omega^2 - 2mg - k}{2k}}\right) = V''\left(-\sqrt{\frac{m\omega^2 - 2mg - k}{2k}}\right) = 2(m\omega^2 - 2mg - k) > 0$$

  Pertanto per $x = 0$ abbiamo configurazione instabile (massimo per il potenziale) e per $x = \pm\sqrt{\frac{m\omega^2 - 2mg - k}{2k}}$ stabili (minimi per il potenziale).

- Nel caso $m\omega^2 = 2mg + k$ il potenziale diviene

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^4$$

  che ha un minimo in 0 e pertanto abbiamo una configurazione stabile.

- $m\omega^2 < 2mg + k$:

$$V''(0) = 2mg + k - m\omega^2 > 0$$

  quindi in $x = 0$ abbiamo una configurazione stabile.

Per i valori dei parametri assegnati nel testo ci troviamo nel primo caso, scegliamo ad esempio di calcolare la forza vincolare nella configurazione positiva, pertanto siamo nel punto $(x, y) = (2, 4)$. In generale

$$R_x = \ddot{x} - f_x$$

dove $R_x$ è la reazione vincolare che vogliamo trovare e $f_x = -\frac{\partial \overline{V}}{\partial x}$, con $\overline{V}$ il potenziale scritto senza considerare i vincoli. Nel nostro caso, dovendo calcolare la reazione vincolare in una configurazione d'equilibrio, si ha $\ddot{x} = 0$, quindi $R_x = -f_x$, ovviamente qui abbiamo scritto lungo l'asse $x$, ma è tutto identico per l'asse $y$. Ignoriamo la guida, dunque abbiamo

$$\overline{V} = mgy - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$$

$$R_x = \frac{\partial \overline{V}}{\partial x} = kx - m\omega^2 x = -20$$

$$R_y = \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} = mg + ky = 5$$

In conclusione $R = (R_x, R_y) = (-20, 5)$.