

FM210 Meccanica Analitica

Soluzioni Tutorato 8

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Francesco Caristo, Laura Fagotto

10/05/2024

Esercizio 1.

Esercizio 2. L'energia cinetica del sistema è data dalla somma delle due energie cinetiche delle sbarre, ognuna calcolata mediante il teorema di König. Indichiamo con x_{AB} e x_{BC} le coordinate dei centri di massa rispettivamente della sbarra AB e BC. Inoltre, ricordiamo il momento d'inerzia di una sbarra $I_{AB} = I_{BC} = \frac{Ml^2}{12}$. Allora abbiamo $x_{AB} = (\frac{l}{2} \sin \theta, -\frac{l}{2} \cos \theta)$, da cui segue $\dot{x}_{AB} = (\dot{\theta} \frac{l}{2} \cos \theta, \dot{\theta} \frac{l}{2} \sin \theta)$; poi $x_{BC} = (\frac{l}{2} \sin \theta, -\frac{3}{2}l \cos \theta)$, cosicchè $\dot{x}_{BC} = (\dot{\theta} \frac{l}{2} \cos \theta, \dot{\theta} \frac{3}{2}l \sin \theta)$. Mettiamo il tutto assieme:

$$T = T_{AB} + T_{BC} = \frac{1}{2}M|\dot{x}_{AB}|^2 + \frac{1}{2}I_{AB}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M|\dot{x}_{BC}|^2 + \frac{1}{2}I_{BC}\dot{\theta}^2 = Ml^2\dot{\theta}^2 \left(\frac{1}{3} + \sin^2 \theta \right)$$

Il potenziale è la somma dei potenziali gravitazionali delle due aste e del potenziale elastico della molla:

$$V = Mg \left(-\frac{l}{2} \cos \theta - \frac{3}{2}l \cos \theta \right) + \frac{1}{2}k(-2l \cos \theta)^2 = -2Mgl \cos \theta + 2kl^2 \cos^2 \theta$$

Pertanto la lagrangiana del sistema è

$$\mathcal{L} = T - V = Ml^2\dot{\theta}^2 \left(\frac{1}{3} + \sin^2 \theta \right) + 2Mgl \cos \theta - 2kl^2 \cos^2 \theta$$

Calcoliamo le derivate necessarie per scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{d}{dt} \left(2Ml^2\dot{\theta} \left(\frac{1}{3} + \sin^2 \theta \right) \right) = 2Ml^2\ddot{\theta} \left(\frac{1}{3} + \sin^2 \theta \right) + 4Ml^2\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= 2Ml^2\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - 2Mgl \sin \theta + 4kl^2 \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

Quindi l'equazione di Eulero-Lagrange è

$$2Ml^2\ddot{\theta} \left(\frac{1}{3} + \sin^2 \theta \right) = -2Ml^2\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - 2Mgl \sin \theta + 4kl^2 \cos \theta \sin \theta$$

Le configurazioni di equilibrio si trovano imponendo $V'(\theta) = 0$, ossia

$$2Mgl \sin \theta - 4kl^2 \cos \theta \sin \theta = 0 \implies \sin \theta = 0 \quad \vee \quad 2Mgl - 4kl^2 \cos \theta = 0$$

Dunque abbiamo configurazioni d'equilibrio per $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, inoltre se $k \geq \frac{Mg}{2l}$ abbiamo anche $\theta = \pm \arccos \left(\frac{Mg}{2kl} \right)$. Studiamo il segno della derivata del potenziale, dividendo i due casi sotto indicati.

- Se $k \leq \frac{Mg}{2l}$:

$$V'(\theta) > 0 \iff \theta \in (0, \pi) \quad \wedge \quad V'(\theta) < 0 \iff \theta \in (-\pi, 0)$$

Da cui segue che $\theta = 0$ è un minimo per il potenziale e dunque una configurazione stabile, mentre $\theta = \pi$ è un massimo per il potenziale e dunque una configurazione d'equilibrio instabile.

- Se $k > \frac{Mg}{2l}$:

$$V'(\theta) > 0 \iff \theta \in (-\arccos\left(\frac{Mg}{2kl}\right), 0) \cup (\arccos\left(\frac{Mg}{2kl}\right), \pi)$$

$$V'(\theta) < 0 \iff \theta \in (-\pi, -\arccos\left(\frac{Mg}{2kl}\right)) \cup (0, \arccos\left(\frac{Mg}{2kl}\right))$$

Da cui deduciamo che $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ sono massimi e dunque instabili, mentre $\theta = \pm \arccos\left(\frac{Mg}{2kl}\right)$ sono minimi e quindi stabili.

Esercizio 3. Il punto P ha coordinate $x_P = (\cos \theta_1, \sin \theta_1, z)$ e il punto Q ha coordinate $x_Q = (\cos \theta_2, \sin \theta_2, 2)$, dunque $\dot{x}_P = (-\dot{\theta}_1 \sin \theta_1, \dot{\theta}_1 \cos \theta_1, \dot{z})$ e $\dot{x}_Q = (-\dot{\theta}_2 \sin \theta_2, \dot{\theta}_2 \cos \theta_2, 0)$, quindi scriviamo l'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{z}^2)$$

Il potenziale è

$$V = mgz + \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}k((\cos \theta_1 - \cos \theta_2)^2 + (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)^2 + (z - 2)^2)$$

che svolgendo i quadrati e ignorando le costanti diviene

$$V = mgz + \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}k(-2\cos(\theta_1 - \theta_2) + z^2 - 4z)$$

Ne segue che la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{z}^2) - mgz - \frac{1}{2}kz^2 - \frac{1}{2}k(-2\cos(\theta_1 - \theta_2) + z^2 - 4z)$$

Se svolgiamo le usuali derivate, troviamo le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\begin{cases} m\ddot{z} = -mg - 2kz + 2k \\ m\ddot{\theta}_1 = -k \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ m\ddot{\theta}_2 = k \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{cases}$$

Per trovare le configurazioni d'equilibrio risolviamo il sistema corrispondente a $\nabla V = 0$:

$$\begin{cases} mg + 2kz - 2k = 0 \\ k \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0 \\ -k \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0 \end{cases}$$

Esso ha soluzioni per $z = 1 - \frac{mg}{2k}$ e $\theta_1 = \theta_2$ o $\theta_1 = \theta_2 + \pi$, inoltre deve essere $-1 \leq \frac{mg}{2k} \leq 0$ per esistere tali configurazioni (poiché $0 \leq z \leq 2$).

La matrice Hessiana del potenziale è

$$\begin{pmatrix} 2k & 0 & 0 \\ 0 & k \cos(\theta_1 - \theta_2) & -k \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ 0 & -k \cos(\theta_1 - \theta_2) & k \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{pmatrix}$$

Che per $\theta_1 = \theta_2 + \pi$ è indefinita e quindi abbiamo configurazioni instabili, mentre per $\theta_1 = \theta_2$ è semidefinita positiva, ciò non ci permette di concludere direttamente. Intuitivamente, da come è fatto il sistema fisico, e con uno studio più analitico della funzione (ad esempio, un'osservazione potrebbe essere che la variabile z è separata da quelle angolari, difatti l'Hessiano è una matrice diagonale a blocchi) si deduce che il punto è di minimo; offriamo una situazione alternativa, il potenziale dipende solo da $\theta_1 - \theta_2$, facciamo il cambio di coordinate

$$\begin{cases} \psi = \theta_1 - \theta_2 \\ \varphi = \theta_1 + \theta_2 \end{cases}$$

In questo sistema di coordinate la lagrangiana ha una variabile ciclica (φ), dunque $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$ se calcoliamo la lagrangiana ridotta col metodo di Routh, vediamo che l'unico termine che si aggiunge al potenziale è una costante (cosa in generale non vera), dunque la lagrangiana equivalente ha potenziale

$$V(z, \psi) = mgz + kz^2 - k \cos \psi - 2kz$$

e la configurazione d'equilibrio rimasta in sospeso corrisponde a quella con $\psi = 0$ che, per gli stessi conti di prima, valutato nell'Hessiano abbiamo

$$H = \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & k \cos(\psi) \end{pmatrix}$$

che in $\psi = 0$ è definita positiva dunque concludiamo che il punto è stabile.

Esercizio 4. Esercizio 2.47 del libro, pag 153.

Esercizio 5. Descriviamo il punto P con posizione data dalle equazione parametriche del testo, quindi la velocità ha coordinate

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{au\dot{u}}{\sqrt{1+u^2}} \cos \theta - a\dot{\theta}\sqrt{1+u^2} \sin \theta \\ \dot{y} = \frac{au\dot{u}}{\sqrt{1+u^2}} \sin \theta + a\dot{\theta}\sqrt{1+u^2} \cos \theta \\ \dot{z} = b\dot{u} \end{cases}$$

Pertanto

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m \left(\left(\frac{a^2 u^2}{1+u^2} + b^2 \right) \dot{u}^2 + a^2(1+u^2)\dot{\theta}^2 \right)$$

Se trascuriamo la gravità, l'unica forza che agisce sul sistema è quella elastica, dunque

$$V = \frac{1}{2}k|(x, y, z)|^2 = \frac{1}{2}k(a^2(1+u^2) + b^2u^2)$$

che a meno di costanti additive possiamo riscrivere

$$V = \frac{1}{2}k(a^2 + b^2)u^2$$

La lagrangiana del sistema è

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m \left(\left(\frac{a^2 u^2}{1+u^2} + b^2 \right) \dot{u}^2 + a^2(1+u^2)\dot{\theta}^2 \right) - \frac{1}{2}k(a^2 + b^2)u^2$$

Si osservi che la lagrangiana non dipende da θ , che pertanto è una variabile ciclica. Calcoliamo il momento conservato coniugato a questa variabile:

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ma^2(1+u^2)\dot{\theta} \implies \dot{\theta} = f(u) = \frac{p}{ma^2(1+u^2)}$$

La lagrangiana ridotta è

$$\mathcal{L}_R = [\mathcal{L} - p\dot{\theta}]|_{\dot{\theta}=f(u)} = \frac{1}{2}m \left(\frac{a^2 u^2}{1+u^2} + b^2 \right) \dot{u}^2 - \frac{p^2}{2ma^2(1+u^2)} - \frac{1}{2}k(a^2 + b^2)u^2$$

Il sistema descritto dalla lagrangiana ridotta è un sistema di potenziale

$$\bar{V}(u) = \frac{p^2}{2ma^2(1+u^2)} + \frac{1}{2}k(a^2 + b^2)u^2$$

Per trovare le configurazioni di equilibrio imponiamo:

$$\bar{V}'(u) = 0 \implies -\frac{p^2 u}{ma^2(1+u^2)^2} + k(a^2 + b^2)u = 0 \implies u = 0 \quad \vee \quad k(a^2 + b^2) - \frac{p^2}{ma^2(1+u^2)^2} = 0$$

$$\implies u = 0 \quad \vee \quad u = \pm \sqrt{\frac{|p|}{a\sqrt{km(a^2 + b^2)}} - 1}$$

dove quest'ultime esistono solo se $|p| > a\sqrt{km(a^2 + b^2)}$.

Consideriamo ora $b = \sqrt{3}a$ e $p^2 = 16mka^4$; in questo caso abbiamo

$$a\sqrt{km(a^2 + b^2)} = 2a^2\sqrt{km} < 4a^2\sqrt{km} = |p|$$

Pertanto ci sono tre configurazioni di equilibrio:

$$u = 0 \quad \vee \quad u = \pm \sqrt{\frac{|p|}{a\sqrt{km(a^2 + b^2)}} - 1} = \pm 1$$

dove abbiamo usato che $|p| = 2a\sqrt{km(a^2 + b^2)}$.

Calcoliamo la derivata seconda per studiare la stabilità:

$$\bar{V}''(u) = \frac{4p^2u^2}{ma^2(1+u^2)^3} - \frac{p^2}{ma^2(1+u^2)^2} + k(a^2 + b^2)$$

Se usiamo le relazioni sopra indicate, troviamo $\bar{V}''(0) < 0$ e $\bar{V}''(\pm 1) > 0$, quindi 0 è instabile e ± 1 sono stabili.