

FM210 Meccanica Analitica

Soluzioni Tutorato 9

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Francesco Caristo, Laura Fagotto

17/05/2024

Esercizio 1. *Le coordinate dei punti sono date da*

$$q_1 = (x_1, x_1) \quad q_2 = (x_2, h)$$

pertanto le velocità saranno date da

$$\dot{q}_1 = (\dot{x}_1, \dot{x}_1) \quad \dot{q}_2 = (\dot{x}_2, 0)$$

Se calcoliamo la norma di tali vettori, vediamo che l'energia cinetica è

$$T = m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2$$

Per quanto riguarda il potenziale, abbiamo il contributo gravitazionale e quello elastico, pertanto (a meno di costanti):

$$V = mgx_1 + \frac{1}{2}k((x_1 - x_2)^2 + (x_1 - h)^2 + x_2^2)$$

Dunque

$$\mathcal{L} = T - V = m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2) - mgx_1 - \frac{1}{2}k((x_1 - x_2)^2 + (x_1 - h)^2 + x_2^2)$$

Le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, sono

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 = -mg - k(2x_1 - x_2 - h) \\ 2m\ddot{x}_2 = -k(2x_2 - x_1) \end{cases}$$

Le configurazioni d'equilibrio coincidono con le soluzioni di

$$\begin{cases} mg + k(2x_1 - x_2 - h) = 0 \\ k(2x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

Che ha come unica soluzione $(\frac{2}{3}(h - \frac{mg}{k}), \frac{1}{3}(h - \frac{mg}{k}))$, per studiarne la stabilità calcoliamo l'Hessiana:

$$H = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}$$

Tale matrice è definita positiva quindi la configurazione è stabile.

Esercizio 2

1. L'energia cinetica dell'anello (teorema di König) è $K_M = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$, dove $I = MR^2$ è il momento d'inerzia dell'anello rispetto all'asse centrale ortogonale e $v = -R\dot{\varphi}$ è la velocità del centro di massa, pertanto

$$K_M = MR^2\dot{\varphi}^2$$

Allo stesso modo l'energia cinetica dell'asta (il cui momento d'inerzia rispetto allo stesso asse è $I' = \frac{m(2R)^2}{12} = \frac{mR^2}{3}$) è

$$K_m = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3}\dot{\theta}^2\right)$$

Mettendo assieme si trova

$$K = \frac{1}{2}[(2M + m)R^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3}\dot{\theta}^2]$$

L'energia potenziale è poi $\frac{1}{2}kd^2$ per ciascuna delle due forze elastiche, con (teorema del coseno) $d^2 = 2R^2[1 - \cos(\theta - \varphi)]$, pertanto

$$V = -2kR^2 \cos(\theta - \varphi) + \text{cost.}$$

La lagrangiana è dunque

$$L(\varphi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}[(2M + m)R^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3}\dot{\theta}^2] + 2kR^2 \cos(\theta - \varphi)$$

La lagrangiana dipende da φ e θ solo attraverso la differenza $\theta - \varphi$, pertanto è invariante sotto la traslazione

$$\varphi \mapsto \varphi' = \varphi + \alpha, \quad \theta \mapsto \theta' = \theta + \alpha \quad (*)$$

(che non tocca le velocità $\dot{\varphi}, \dot{\theta}$). Il teorema di Noether ci assicura allora che si conserva la quantità

$$P = p_\varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial \alpha} + p_\theta \frac{\partial \theta'}{\partial \alpha} = p_\varphi + p_\theta = (2M + m)R^2\dot{\varphi} + \frac{1}{3}mR^2\dot{\theta}$$

(non occorre valutare in $\alpha = 0$ perché l'espressione è indipendente da α).

2. Le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{cases} (2M + m)\ddot{\varphi} = 2k \sin(\theta - \varphi) \\ \frac{1}{3}m\ddot{\theta} = -2k \sin(\theta - \varphi) \end{cases}$$

Vediamo quindi che ci sono infiniti punti di equilibrio: (a) φ qualsiasi e $\theta = \varphi$

(b) φ qualsiasi e $\theta = \varphi + \pi$

Per discutere la stabilità di queste soluzioni, calcoliamo la matrice hessiana di V :

$$H(\varphi, \theta) = 2kR^2 \cos(\theta - \varphi) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolando $H(\varphi, \theta)$ nei punti di equilibrio di tipo (a) e (b) si rispettivamente trovano le seguenti due matrici:

$$H_a = H(\varphi, \varphi) = 2kR^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_b = H(\varphi, \varphi + \pi) = -H_a$$

Entrambe le matrici hanno determinante nullo.

Più precisamente, H_a ha un autovalore nullo e uno positivo: questa è la tipica situazione in cui l'analisi delle derivate seconde di V non basta a capire se l'equilibrio sia stabile. Invece H_b , accanto all'autovalore nullo, ha un autovalore negativo, la cui presenza assicura l'instabilità.

Le configurazioni di equilibrio di tipo (b) sono dunque sicuramente instabili. In realtà anche le configurazioni di tipo (a) sono instabili. Lo si intuisce perché V è esattamente piatto in una direzione, quella corrispondente ad avanzare φ e θ di una stessa quantità come in (4).

Formalmente l'instabilità si dimostra osservando che arbitrariamente vicino al punto di equilibrio

$$(\varphi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\theta}) = (\varphi^*, \varphi^*, 0, 0)$$

c'è un dato iniziale $(\varphi^*, \varphi^*, \varepsilon, \varepsilon)$ cui corrisponde un moto

$$\varphi(t) = \varphi^* + \varepsilon t, \quad \theta(t) = \varphi(t)$$

che si allontana da $(\varphi^*, \varphi^*, 0, 0)$. (è immediato verificare che questo moto soddisfa le equazioni di Lagrange del sistema: infatti $\ddot{\theta} = \ddot{\varphi} = 0$, e insieme $\sin(\theta - \varphi) = 0$). Quindi abbiamo ottenuto l'instabilità.

Esercizio 3 Se indichiamo con r_{P_i} la coordinata del punto P_i , abbiamo

$$r_{P_0} = (x, 0) \quad r_{P_1} = (\sin \theta, -\cos \theta)$$

$$r_{P_2} = (\sin \theta + \cos \theta, -\cos \theta + \sin \theta) \quad r_{P_3} = (\sin \theta - \cos \theta, -\cos \theta - \sin \theta)$$

Deriviamo:

$$\dot{r}_{P_0} = (\dot{x}, 0) \quad \dot{r}_{P_1} = (\dot{\theta} \cos \theta, \dot{\theta} \sin \theta)$$

$$\dot{r}_{P_2} = (\dot{\theta}(\cos \theta - \sin \theta), \dot{\theta}(\sin \theta + \cos \theta)) \quad \dot{r}_{P_3} = (\dot{\theta}(\sin \theta + \cos \theta), \dot{\theta}(\sin \theta - \cos \theta))$$

Dopo aver calcolato la norma al quadrato delle velocità, abbiamo che l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{5}{2}m\dot{\theta}^2$$

A questo punto scriviamo il potenziale, nel quale abbiamo contributi di tipo elastico e di tipo gravitazionale:

$$V = -mg \cos \theta + mg(-\cos \theta + \sin \theta) + mg(-\cos \theta - \sin \theta) + \frac{1}{2}k((x - \sin \theta - \cos \theta)^2 + (\cos \theta - \sin \theta)^2 + (x - \sin \theta + \cos \theta)^2 + (\cos \theta + \sin \theta)^2)$$

Se svolgiamo qualche conto, possiamo scrivere a meno di costanti

$$V = -3mg \cos \theta + k(x^2 - 2x \sin \theta)$$

La lagrangiana, dunque, corrisponde a

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{5}{2}m\dot{\theta}^2 + 3mg \cos \theta - k(x^2 - 2x \sin \theta)$$

Le cui equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -k(2x - 2\sin\theta) \\ 5m\ddot{\theta} = -3mg\sin\theta + 2kx\cos\theta \end{cases}$$

Per lo studio delle configurazioni d'equilibrio imponiamo l'annullarsi del gradiente del potenziale, ottenendo così il sistema:

$$\begin{cases} k(2x - 2\sin\theta) = 0 \\ 3mg\sin\theta + 2kx\cos\theta = 0 \end{cases}$$

Da cui

$$\begin{cases} x = \sin\theta \\ \sin\theta(3mg - 2k\cos\theta) = 0 \end{cases}$$

Che ha come soluzioni $(0, 0)$ e $(0, \pi)$ se $\alpha := \frac{3mg}{2k} > 1$, invece se $0 < \alpha \leq 1$ abbiamo anche

$$a_{\pm} := \left(\pm\sqrt{1 - \alpha^2}, \pm\arccos(\alpha) \right)$$

La matrice Hessiana del potenziale è

$$H = \begin{pmatrix} 2k & -2k\cos\theta \\ -2k\cos\theta & 3mg\cos\theta + 2kx\sin\theta \end{pmatrix}$$

Studiamo punto per punto la stabilità al variare di α :

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 3mg \end{pmatrix}$$

abbiamo un elemento positivo sulla diagonale e $\det H(0, 0) = 4k^2(\alpha - 1)$, quindi se $\alpha > 1$ è definita positiva quindi l'origine è stabile, se $\alpha < 1$ è indefinita e dunque l'origine è instabile, se $\alpha = 1$ è semidefinita positiva, quindi studiamo in maniera più approfondita la funzione (usiamo che $\alpha = 1$):

$$V - V(0, 0) = 2k(\cos\theta - 1) - k(x^2 - 2x\sin\theta)$$

tale funzione sulla curva definita da $\theta = 0$ è negativa pertanto $(0, 0)$ non è un punto di minimo e quindi non è stabile.

$$H(0, \pi) = \begin{pmatrix} 2k & 2k \\ 2k & -3mg \end{pmatrix}$$

Che è indefinita per ogni valore di α e dunque $(0, \pi)$ è instabile.

$$H(a_+) = \begin{pmatrix} 2k & -2k\alpha \\ -2k\alpha & 3mg\alpha + 2k(1 - \alpha^2) \end{pmatrix}$$

Si ha $\det H(a_+) = 4k^2(\alpha + 1)(\alpha - 1)$, possiamo concludere (vedendo sempre anche la diagonale) che per $\alpha > 1$ è definita positiva e dunque la configurazione è stabile, per $\alpha = 1$ la configurazione coincide con l'origine (già discusso), infine per $\alpha < 1$ è indefinita e dunque la configurazione è instabile. Il caso di a_- è identico a quello di a_+ .

Esercizio 4 Scegliamo un sistema di riferimento come in figura, ma con l'asse z orientato verso l'alto. Siano $r_C = (y, z)$ le coordinate del centro di massa della lamina.

Usiamo il Teorema di König per trovare l'energia cinetica, ricordando che il momento d'inerzia di una lamina rispetto all'asse ortogonale passante per il centro di massa è $I = \frac{1}{6}Ml^2$:

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{12}Ml^2\dot{\theta}^2$$

Scriviamo le coordinate dei punti A e C , che sono utili per il potenziale elastico:

$$r_A = \left(y - \frac{l}{\sqrt{2}} \cos \theta, z - \frac{l}{\sqrt{2}} \sin \theta \right) \quad r_C = \left(y + \frac{l}{\sqrt{2}} \cos \theta, z + \frac{l}{\sqrt{2}} \sin \theta \right)$$

A questo punto scriviamo il potenziale

$$V = mgz + \frac{1}{2}k \left(\left(y - \frac{l}{\sqrt{2}} \cos \theta + d \right)^2 + \left(z - \frac{l}{\sqrt{2}} \sin \theta \right)^2 + \left(y + \frac{l}{\sqrt{2}} \cos \theta - d \right)^2 + \left(z + \frac{l}{\sqrt{2}} \sin \theta \right)^2 \right)$$

Dopo aver svolto i quadrati all'interno del potenziale e ignorato le costanti, scriviamo la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M(\dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{12}Ml^2\dot{\theta}^2 - mgz - k(y^2 + z^2 - \sqrt{2}dl \cos \theta)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti sono

$$\begin{cases} M\ddot{y} = -2ky \\ M\ddot{z} = -Mg - 2kz \\ \frac{1}{6}Ml^2\ddot{\theta} = -\sqrt{2}kdl \sin \theta \end{cases}$$

Le configurazioni d'equilibrio sono $(0, -\frac{mg}{2k}, 0)$ e $(0, -\frac{mg}{2k}, \pi)$, e l'Hessiana del potenziale è

$$H = \begin{pmatrix} 2k & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}kdl \cos \theta \end{pmatrix}$$

Pertanto quello con $\theta = 0$ è corrisponde ad una configurazione stabile e quella con $\theta = \pi$ ad una instabile. Si noti che l'equazioni di Eulero-Lagrange in y e z hanno come soluzioni rispettivamente:

$$y(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad z(t) = -\frac{Mg}{2k} + C \cos(\omega_0 t) + D \sin(\omega_0 t)$$

dove $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{M}}$ e A, B, C, D costanti che dipendono dai dati iniziali. Inoltre, chiamando $\omega_1 = \sqrt{\frac{6\sqrt{2}kdl}{Ml}}$ l'equazione nella variabile θ diviene $\ddot{\theta} = -\omega_1^2 \sin \theta$, ossia coincide con l'equazione di un pendolo semplice.

Esercizio 5

Soluzione **Scelta delle coordinate ed equazioni del moto** L'invarianza per rotazioni intorno all'asse z suggerisce di utilizzare coordinate polari. Sia r la distanza dall'origine della proiezione del punto sul piano (x, y) , cioè $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Sia ϕ l'angolo che la congiungente dell'origine con la proiezione forma con l'asse delle x nella direzione positiva. Con queste due coordinate posso descrivere il sistema: $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, $z = -\sqrt{l^2 + r^2}$. Il calcolo delle velocità dà:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi \\ \dot{z} &= -\frac{r\dot{r}}{\sqrt{l^2 + r^2}} \end{aligned} \tag{3}$$

Il calcolo dell'energia cinetica dà:

$$T = \frac{1}{2}mr^2\frac{\dot{l}^2 + 2\dot{r}^2}{l^2 + r^2} + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2.$$

L'energia potenziale ha due contributi: la forza di gravità che dà il contributo $-mg\sqrt{l^2 + r^2}$ e la molla che dà il contributo $\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}k(l^2 + 2r^2)$. Elimino il termine l^2 perché non contribuisce alla determinazione del moto. In sintesi la lagrangiana è:

$$L = \frac{1}{2}mr^2\frac{\dot{l}^2 + 2\dot{r}^2}{l^2 + r^2} + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 + mg\sqrt{l^2 + r^2} - kr^2.$$

Il lettore proceda al calcolo delle equazioni del moto ;)

Posizioni di equilibrio La derivata dell'energia potenziale, che dipende solo da r , è

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -mgr\frac{1}{\sqrt{l^2 + r^2}} + 2kr.$$

Dunque $r = 0$ è un equilibrio, qualunque sia ϕ . Altri equilibri esistono se e solo se: $\sqrt{l^2 + r^2} = \frac{mg}{2k}$. Quindi $r^2 = l^2 \left(\left(\frac{mg}{2kl} \right)^2 - 1 \right)$. L'equilibrio esiste se e solo se $\frac{mg}{2kl} \geq 1$. Ovviamente solo il valore positivo di r è accettabile, in quanto r è una variabile positiva. Sia $\bar{r} = l\sqrt{\left(\left(\frac{mg}{2kl} \right)^2 - 1 \right)}$ quando esiste reale.

Quante sono le posizioni di equilibrio?

Il potenziale non dipende da ϕ , quindi qualunque sia $\bar{\phi}$ ($0, \bar{\phi}$) e $(\bar{r}, \bar{\phi})$ sono posizioni di equilibrio. D'altra parte se $r = 0$, qualunque sia $\bar{\phi}$ fisicamente ($0, \bar{\phi}$) è l'origine del piano. Dunque se $\frac{mg}{2kl} \leq 1$ c'è solo una posizione di equilibrio, l'origine del piano; se $\frac{mg}{2kl} > 1$ esistono altre infinite posizioni di equilibrio a distanza $\bar{r}$ dall'origine.

Sviluppano con Taylor al secondo ordine V intorno a 0 si ottiene $V(r) = -mgl^2 + kr^2 \left(1 - \frac{mg}{2kl} \right)$. Dunque è stabile se $\frac{mg}{2kl} < 1$ ed è instabile se $\frac{mg}{2kl} > 1$. Considerando anche i termini r^4 si ottiene che il l'origine è stabile anche per $\frac{mg}{2kl} = 1$.

Le altre infinite posizioni di equilibrio, quando esistono, sono instabili pur essendo dei minimi per V considerato nella sola variabile r . Infatti come funzione di (r, ϕ) , sono dei minimi non stretti.

Riduzione dei gradi di libertà e analisi qualitativa L'invarianza per rotazioni ha come conseguenza che la variabile ϕ è ciclica. Dunque il momento coniugato si conserva: $P = p_\phi = mr^2\dot{\phi}$ è un integrale primo del moto. Sostituendolo nell'espressione dell'energia meccanica si ottiene:

$$E = \frac{1}{2}mr^2\frac{\dot{l}^2 + 2\dot{r}^2}{l^2 + r^2} + \frac{1}{2mr^2}P^2 - mg\sqrt{l^2 + r^2} + kr^2.$$

Indico con $V_e = +\frac{1}{2mr^2}P^2 - mg\sqrt{l^2 + r^2} + kr^2$, l'energia potenziale efficace. La derivata di V_e è:

$$V'_e = -\frac{P^2}{mr^3} - r\frac{mg}{\sqrt{l^2 + r^2}} + 2kr.$$

Come spesso accade la soluzione esplicita di $V'_\epsilon(r) = 0$ non sembra essere possibile esplicitamente (esce un'equazione in r^8 , r^4 e r^2). Bisogna tentare di capire qualitativamente se esistono soluzioni. L'equazione è:

$$\frac{P^2}{mr^4} = k - \frac{mg}{\sqrt{l^2 + r^2}}.$$

Disegnando il grafico delle due funzioni si capisce che esiste sempre una posizione di equilibrio. Inoltre è unica perché la funzione a sinistra è decrescente e la funzione a destra è crescente.

Disegnando il grafico dell'energia potenziale efficace si vede che l'equilibrio è un minimo, quindi è stabile.

Il lettore completi l'esercizio scrivendo le formule di quadratura per il moto complessivo, e discuta qualitativamente il moto.