FM210 Meccanica Analitica
Tutorato 1

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Lorenzo De Leonardis, Laura Fagotto

29/02/2024

"La meccanica è il paradiso della matematica perché qui se ne possono cogliere i frutti. Non c'è certezza nella scienza se la matematica non può esservi applicata, o se non vi è comunque in relazione."
Leonardo Da Vinci

Esercizio 1. *Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari*

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

con dato iniziale $x(0) = (0, 1, 1)$. *Se ne determini la soluzione.*

Esercizio 2. *Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y \\ \dot{y} = -x \end{cases};$$

con dato iniziale $(x(0), y(0)) = (1, 1)$. *Se ne determini la soluzione.*

Esercizio 3. *Si consideri il sistema di equazioni lineari*

$$\dot{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

con dato iniziale $(x(0), y(0), z(0)) = (-1, 1, -2)$. *Se ne determini la soluzione.*

Esercizio 4. *Date le matrici:* $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B := \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad C := \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad D := \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Calcolare le seguenti matrici e quantità:

(i) $Be^A - Ae^B$;

(ii) $[e^C, e^D] := e^C e^D - e^D e^C$;

(iv) $\det(e^C)$, $\quad e^{tr(C)}$.

Esercizio 5. *Dimostrare le seguenti proprietà:*

(i) Siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *tali che* $[A, B] = 0$ *(ovvero le due matrici commutano), allora* $e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$

(ii) Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ *una matrice diagonalizzabile, ovvero esiste una matrice* P *invertibile tale che* $A = PDP^{-1}$, *allora* $e^A = Pe^D P^{-1}$

(iii) Sapendo che ogni matrice M di dimensione nxn sul campo $\mathbb{C}$ è scrivibile come somma di una matrice D diagonale e N nilpotente, ovvero per il teorema di Jordan-Chevalley esiste una matrice S invertibile tale che $M = SJS^{-1}$, con $J = D + N$ e $[D, N] = 0$, allora dimostrare che $e^M = Se^D \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} N^j \right) S^{-1}$, con $k = \min\{n \in \mathbb{N} : N^n = 0\}$ e quindi che il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ammette come unica soluzione:

$$x(t) = Se^{tD} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} (tN)^j \right) S^{-1} x_0.$$

(iv) Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice diagonalizzabile. Dimostrare che $\det(\exp(A)) = \exp(tr(A))$;

Esercizio 6. *Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari*

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

con condizioni iniziali generiche $x(0) = x_0$. Trovare la soluzioni al variare di α.

Esercizio 7. *Risolvere la seguente ODE di grado I esibendo la formula esatta:*

$$(i) \begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)x(t) + f(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

con $a(t), f(t)$ funzioni continue su un certo intervallo I.

(ii) Risolverlo nel caso in cui $a(t) = 2t$, $f(t) = 5t^3$ e $x_0 = 1$;

(iii) Verificare che è un sistema dinamico, calcolarne il flusso $\varphi(t, x_0)$ e disegnarlo.

Esercizio 8. *Risolvere la seguente ODE di grado I esibendo la formula esatta:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + f(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

con $A \in M_n(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n$ con componenti a_{ij} funzioni continue su un certo intervallo e f un vettore con componenti continue.

Esercizio 9. *Si considerino i seguenti sistemi dinamici*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = -y^2 + (2e^{-x} - 1)^2 - 4xe^{-x}(2e^{-x} - 1) \end{cases} ; \qquad \begin{cases} \dot{x} = (A - By)x \\ \dot{y} = (Cx - D)y \end{cases} .$$

Dimostrare che $\mathcal{H}(x, y) = x(y^2 - (2e^{-x} - 1)^2)$ e $\mathcal{W}(x, y) = -D \ln x + Cx + By - A \ln y$ sono rispettivamente le costante del moto del primo e del secondo sistema dinamico.

Curiosità: le seconde equazioni vengono chiamate "Equazioni di Lotka-Volterra" e descrivono un sistema ecologico dove ci sono i predatori, coloro che hanno come unico cibo la preda, e le prede, che hanno una quantità di cibo costante ad ogni tempo. Denotiamo $x :=$ numero di prede e $y :=$ numero di predatori. La domanda è: sotto alcune ipotesi iniziali, riusciamo a capire come evolve il numero di prede e predatori nel tempo? E soprattutto, se a questo modello aggiungiamo una piccola modificca (la chiameremo perturbazione), come per esempio un cacciatore di predatori, che succede ad x e y al variare del tempo?

ESERCIZI BONUS

Esercizio 10 (Sistema di Roosler con forzante). *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + f_1(t) \\ \dot{y} = x + ay + f_2(t) \end{cases}$$

con $a \in \mathbb{R}$, $f_1(t) = 3t$, $f_2(t) = -4\sin t$ *e con dato iniziale* $(x(0), y(0)) = (1, 0)$.

Se ne determini la soluzione al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 11 (Equazioni di Lorenz linearizzata). *Si consideri il sistema dinamico*

$$\begin{cases} \dot{x} = 10(y - x) \\ \dot{y} = \rho x - xz - y \\ \dot{z} = xy - \frac{8}{3}z \end{cases}$$

(i) Si consideri $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *e* $f_i(w)$ *la componente* $i-$*esima del campo vettoriale* $f(w)$ *e si sviluppi fino al primo ordine usando Taylor il campo vettoriale* $\dot{w} = f(w)$ *attorno al punto* $(0, 0, 0)$.

(ii) Si risolva al variare del parametro $\rho > 0$ *l'equazione differenziale escludendo il resto di Taylor, ovvero si risolva il sistema:*

$$\dot{w} = J_{|_{(0,0,0)}} w, \text{ dove } (J)_{ij} = \partial_{x_i} f_j \text{ è la matrice Jacobiana del campo.}$$

(iii) Verificare che sul piano (x,y) la soluzione è una retta per ogni dato iniziale. Infine graficare sul piano (x,y,z) il flusso $\varphi(t, (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}))$ *per* $t \in [0, 1]$.