# FM210 Meccanica Analitica
# Tutorato 10

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Francesco Caristo, Laura Fagotto

24/05/2024

*"Una teoria matematica non può considerarsi completa finché non sia stata resa tanto chiara da poterla spiegare al primo uomo che si incontra per strada."*

David Hilbert

**Esercizio 1.** *Si consideri la trasformazione di coordinate*

$$\begin{cases} P = \alpha p e^{\beta q} \\ Q = \frac{1}{\alpha} e^{-\beta q} \end{cases}$$

*Dire per quali valori di $\alpha$ e $\beta$ la trasformazione è canonica.*

**Esercizio 2.** *Data la lagrangiana*

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + q\dot{q} + 3q^2$$

*scrivere l'hamiltoniana associata e risolvere le equazioni di Hamilton associate.*

**Esercizio 3.** *Si consideri la trasformazione di coordinate*

$$\begin{cases} Q = 2a \log p + \log q \\ P = -p^b q \log q \end{cases}$$

*con $p, q > 0$.*

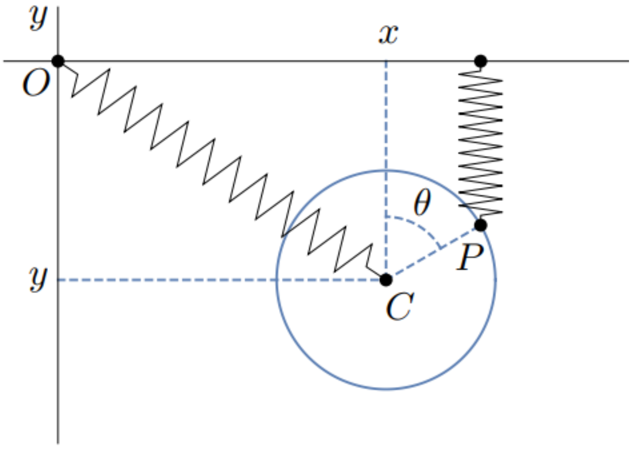
1. *Si determinino i valori di $a, b$ per cui la trasformazione è canonica.*
2. *Si determini l'inversa della trasformazione canonica per i valori di $a, b$ trovati al punto precedente.*
3. *Si consideri l'hamiltoniana $H(q,p) = \frac{1}{2}q^2p^2(\log q)^2$, si determini l'hamiltoniana nelle nuove coordinate, si scrivano le equazioni di Hamilton corrispondenti e le si risolvano in corrispondenza dei dati iniziali $(q_0, p_0) = (e, \frac{1}{e})$; infine si usi la trasformazione trovata al punto 2 per riesprimere la soluzione nelle variabili di partenza.*

**Esercizio 4.** *Si consideri la seguente trasformazione di coordinate:*

$$\begin{cases} Q = \log(\frac{1}{q} e^{\alpha p}) \\ P = \beta q e^{\gamma p} \end{cases} .$$

*Si dica per quali valori dei parametri $\alpha, \beta, \gamma$ è canonica e se ne trovi una funzione generatrice di prima specie.*

**Esercizio 5.** *Un sistema meccanico 'e costituito da un disco omogeneo di raggio $R = 1$ e massa $M = 1$, vincolato a muoversi in un piano verticale; una molla di lunghezza a riposo trascurabile e di costante elastica $k$ collega il centro $C$ del disco a un punto fisso $O$. Si scelga un sistema di riferimento la cui origine coincida con il punto $O$ e il cui asse $y$ sia diretto lungo la direzione verticale. Una seconda molla, sempre di lunghezza a riposo trascurabile e di costante elastica $k$, collega un punto $P$ del bordo del* *disco a un punto mobile dell'asse $x$ che ha la stessa ascissa di $P$. Il disco è infine sottoposto alla forza di gravità, diretta verso il basso lungo l'asse $y$; sia $g$ l'accelerazione di gravità. [Il momento principale d'inerzia di un disco di massa $M$ e raggio $R$ rispetto a un asse ad esso ortogonale e passante per il suo centro di massa 'e $I_3 = MR^2/2$.]*




1. *Si scriva la lagrangiana del sistema, usando come coordinate lagrangiane le coordinate $(x, y)$ di $C$ e l'angolo $\theta$ che il segmento $CP$ forma rispetto all'asse $y$ (cfr. la figura).*
2. *Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.*
3. *Si determinino le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri positivi $k$ e $g$.*
4. *Se ne discuta la stabilità al variare dei parametri.*