FM210 Meccanica Analitica
Tutorato 11

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Francesco Caristo, Laura Fagotto

31/05/2024

"Cogliete l'attimo ragazzi, rendete straordinaria la vostra vita."

Robin Williams

Esercizio 1. *Per $q > 0$ si consideri la lagrangiana*

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^2}{2q^2} - \log q$$

1. *Si determini l'hamiltoniana.*
2. *Si determinino le equazioni di Hamilton.*
3. *Si determini la trasformazione canonica generata dalla funzione generatrice di seconda specie $F(q, P) = P \log q$ e si calcolino la nuova hamiltoniana e le nuove equazioni di Hamilton nelle variabili (Q, P).*
4. *Si usino le nuove variabili per risolvere il moto corrispondente ai dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 0)$.*

Esercizio 2. *Si consideri la trasformazione di coordinate:*

$$\begin{cases} Q = 2\sqrt{q(p - \log q - 1)}\log(q) \\ P = \sqrt{q(p - \log q - 1)} \end{cases}$$

1. *Si determini il dominio della trasformazione e se ne calcoli l'inversa.*
2. *Si dimostri che la trasformazione è canonica verificando esplicitamente che le parentesi di Poisson fondamentali sono conservate.*
3. *Si consideri il sistema hamiltoniano descritto dall'hamiltoniana $H(q, p) = (qp - q\log q - q)^2$ nel sistema di coordinate (q, p): si determini l'hamiltoniana nel sistema di coordinate (Q, P), usando la trasformazione del punto precedente.*
4. *Si trovi la soluzione $(q(t), p(t))$ con dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 2)$.*
5. *Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F_2(q, P)$ della trasformazione data.*
6. *Si trovi, se possibile, una funzione generatrice di prima specie $F_1(q, Q)$.*

Esercizio 3. *Si considerino, per $p_1, p_2 > 0$ e $q_1, q_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$, le seguenti due trasformazioni di coordinate*

$$\begin{cases} Q_1 = \sqrt{p_2}\cos q_1 \\ Q_2 = \sqrt{p_1}\cos q_2 \\ P_1 = -2\sqrt{p_2}\sin q_1 \\ P_2 = -2\sqrt{p_1}\sin q_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} Q_1 = \sqrt{p_1}\cos q_1 \\ Q_2 = \sqrt{p_2}\cos q_2 \\ P_1 = -2\sqrt{p_1}\sin q_1 \\ P_2 = -2\sqrt{p_2}\sin q_2 \end{cases}$$

1. *Dire quale delle due trasformazioni è canonica, usando le parentesi di Poisson fondamentali.*

2. *Si trovi, per la trasformazione canonica del punto precedente, una funzione generatrice di prima specie $F(q_1, q_2, Q_1, Q_2)$.*

3. *Si verifichi esplicitamente che la funzione trovata al punto precedente soddisfa la condizione che la matrice di elementi $\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial Q_j}$ è non singolare.*

4. *Si discuta se sia possibile trovare una funzione generatrice di seconda specie e, in caso affermativo, la si determini.*

Esercizio 4. *Si consideri la trasformazione di coordinate*

$$\begin{cases} Q = -p\sqrt{\frac{1-qp}{1+qp}} \\ P = q\sqrt{\frac{1+qp}{1-pq}} \end{cases}$$

1. *Si calcolino le derivate parziali di Q e P rispetto a q e p e si dimostri che la trasformazione è canonica, verificando che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali.*

2. *Si dimostri che $pq = -QP$ e si utilizzi tale risultato per ricavare q in termini di Q e P a partire dall'espressionedi P in termini di q e p.*

3. *Esplicitando anche p in funzione di Q e P, si calcoli la trasformazione inversa della trasformazione data.*

4. *Si trovi una funzione generatice di seconda speci $F(q, P)$.*

5. *Si consideri il sistema hamiltoniano descritto dall'hamiltoniana $H(q, p) = q^2(1 + qp)(1 - qp)^{-1}$; si calcoli l'hamiltoniana nelle variabili (Q, P).*

6. *Si usi il risultato del punto precedente per determinare esplicitamente la soluzione $(q(t), p(t))$ con dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 0)$.*

Esercizio 5. *Si consideri la lagrangiana*

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(1 + 2q^2)^2 e^{2q^2} \dot{q}^2.$$

1. *Si determini l'hamiltoniana $H(q, p)$ associata a $\mathcal{L}(q, \dot{q})$.*

2. *Si scrivano le equazioni di Hamilton corrispondenti.*

3. *Si dimostri che la trasformazione di coordinate*

$$\begin{cases} Q = q^2 + \log\left(\frac{1+2q^2}{p}\right) \\ P = \frac{qp}{1+2q^2} \end{cases}$$

   è canonica, verificando che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali.

4. *Si determini l'hamiltoniana $K(Q, P)$ nel sistema di coordinate (Q, P).*