FM210 Meccanica Analitica
Tutorato 2

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Lorenzo de Leonardis, Laura Fagotto

08/03/2024

"La matematica è l'arte di dare lo stesso nome a cose diverse."

Henri Poincaré

Esercizio 1. *Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1$ su $\mathbb{R}$:*

$$\ddot{x} = x^2 - x.$$

1. *Si determini una grandezza conservata del moto;*
2. *Si disegnino le curve di livello corrispondenti nel piano delle fasi;*
3. *Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, a moti aperti e a moti limitati asintotici.*

Esercizio 2. *Sia $V(x) = x + 2\sin x$ un potenziale. Rispondere alle seguenti richieste:*

1. *Scrivere l'equazione del moto e verificare la conservazione dell'energia meccanica, cioè mostrare che $E(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x)$ è una costante del moto;*
2. *Si disegni il grafico dell'energia potenziale;*
3. *Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato;*
4. *Si disegnino le curve di livello corrispondenti nel piano delle fasi,*
5. *Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a (qualora esistano) moti periodici, a moti aperti e a moti limitati asintotici.*

Esercizio 3. *Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale*

$$V(x) = \log(1 + x^2) - \log(1 + \alpha x + x^2).$$

Si consideri esplicitamente il caso $\alpha = 1$.

1. *Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$;*
2. *Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato;*
3. *Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio;*
4. *Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.*

Si discuta come cambia lo scenario al variare di α in $\mathbb{R}$.

Esercizio 4. *Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa* $m = 1$ *sottoposto alla forza di energia potenziale*

$$V(x) = e^{-x^2} x^2 (x^2 - \alpha)$$

Si consideri esplicitamente il caso $\alpha = 1$

1. *Si studi il grafico dell'energia potenziale* $V(x)$*;*
2. *Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato;*
3. *Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio;*
4. *Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi* $(x, \dot{x})$.

Esercizio 5. *Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa* $m \neq 0$ *su* $\mathbb{R}$ *sottoposto alla forza di energia potenziale*

$$V(x) = \frac{x^4}{4} + \gamma \frac{x^2}{2} + e^x$$

1. *Si determinino i punti di equilibrio al variare di* $\gamma \in \mathbb{R}$*;*
2. *Si studi la stabilità dei punti di equilibrio, si disegnino le curve di livello corrispondenti sul piano delle fasi e si verifichi la coerenza di stabilità/instabilità con la rappresentazione grafica;*
3. *Si determini l'energia del sistema, si faccia un disegno grafico dell'energia rispetto alle variabili* $(x, \dot{x})$ *e si verifichi che* $E(x, \dot{x})$ *è una costante del moto.*

Esercizio 6. *(BONUS) Si consideri il seguente sistema dinamico planare:*

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x,y) \cdot \partial_y W(x,y) \\ \dot{y} = -g(x,y) \cdot \partial_x W(x,y) \end{cases} \quad \text{con } g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}),\ W \in \mathcal{C}'(I, \mathbb{R}) \text{ e } (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ I \subset \mathbb{R}^2$$

1. *Si dimostri che* $W(x,y)$ *è una costante del moto per il sistema;*
2. *Se* $g(x,y) \neq 0$ *per ogni* $(x,y) \in I$*, si dimostri che i punti di equilibrio del sistema corrispondono ai punti stazionari della funzione* $W(x,y)$ *e si trovi una possibile candidata come funzione di Ljapunov;*
3. *Si consideri il sistema di Lotka-Volterra*

   $$\begin{cases} \dot{x} = (A - By)x \\ \dot{y} = (Cx - D)y \end{cases} \quad \text{con A,B,C,D costanti positive.}$$

   Si verifichi che appartiene alla classe dei sistemi descritti nell'esericizio trovando la $g(x,y)$*, si determinino i punti di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità trovandone una quantità conservata.*

   (Suggerimento: Verificare che la quantità conservata corrisponde alla funzione di Ljapunov, utile a dimostrare la stabilità di un certo punto di equilibrio)

Esercizio 7. *(BONUS) [Sistemi gradiente e funzione di Ljapunov] Sia* $z = (x_1, ..., x_n) \in R^n$ *e* $U \in \mathcal{C}'(\mathbb{R}^n, R)$ *un certo potenziale. Si consideri il seguente sistema:*

$$\dot{z} = -\nabla_z U(z) := -(\partial_{x_1} U, ..., \partial_{x_n} U)^t$$

1. *Si trovi una naturale funzione di Ljapunov associata al sistema gradiente;*
2. *Si dimostri che ogni punto* z_0 *di minimo locale forte per* $U(z)$ *è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema dinamico gradiente;*

3. *Si dimostri che i sistemi gradienti con potenziali che ammettono minimi locali forti non possono ammettere costanti del moto;*

4. *Si consideri il sistema gradiente indotto dal potenziale* $U(x,y) = -\frac{2+x^2+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}$ *e lo si studi completamente. Il punto di equilibrio trovato ha una stabilità coerente con il punto 2?*

5. *Si consideri il sistema gradiente indotto dal potenziale* $U(x,y) = xy\ln(x)$*. L'instabilità del punto di equilibrio viola il punto 2?*