FM210 Meccanica Analitica
Tutorato 3

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Lorenzo de Leonardis, Laura Fagotto

14/03/2024 (Giornata del Pi Greco)

"Nella descrizione matematica dei moti fisici, π compare costantemente come un ponte tra la geometria e la dinamica, rivelando la bellezza e l'efficienza della matematica nel descrivere il mondo naturale."

Isaac Newton

Esercizio 1. *Si consideri il sistema dinamico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, soggetto a un'energia potenziale*

$$V(x) = -x^4 + 5x^2 - \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si discutano, al variare di α, i seguenti punti.

1. *Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.*
2. *Studiare il grafico dell'energia potenziale.*
3. *Determinare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.*
4. *Analizzare qualitativamente il piano delle fasi $(x, \dot{x})$.*
5. *Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche e verificare in particolare che esiste una traiettoria periodica per $\alpha = 4$ con energia $E = 0$.*
6. *Scrivere il periodo T come integrale definito e darne una stima.*

Esercizio 2. *Sia dato un sistema dinamico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza*

$$F(x) = -\alpha x + \beta x^5, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Si rispondano alle seguenti domande al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. *Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.*
2. *Studiare il grafico dell'energia potenziale.*
3. *Determinare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.*
4. *Analizzare qualitativamente il piano delle fasi $(x, \dot{x})$.*
5. *Determinare per quali α, β si hanno traiettorie periodiche con dato iniziale $(x, \dot{x}) = (0, 1)$.*
6. *Scrivere per tali valori il periodo come integrale definito e calcolarlo esplicitamente per $\beta = 0$.*

Esercizio 3. *Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1$ su $\mathbb{R}$,*

$$\ddot{x} = -U'(x), \qquad U(x) = \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & se\ x \neq 0 \\ 0 & se\ x = 0 \end{cases} .$$

1. *Si disegni il grafico di $U(x)$;*
2. *Si disegnino le traiettorie del sistema nel piano delle fasi;*
3. *Si dimostri che il punto di equilibrio $x = 0$ è stabile, pur non essendo un minimo isolato di U.*

Esercizio 4. *Si consideri il sistema meccanico unidimensionale conservativo descritto dalla seguente equazione:*

$$\ddot{x} = \frac{ax^2 - 2x - 2a^2 + 2}{(x^2 - 2x + 2a)^2} \qquad \text{con } a > 0$$

Inoltre, si scelga l'energia potenziale in modo che $V(0) = -\frac{1}{2a}$

1. *Si consideri esplicitamente il caso $a = 1$*
   (a) *Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$;*
   (b) *Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità;*
   (c) *Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.*
   (d) *Dove avviene un moto periodico, se ne imposti la formula integrale del periodo e se ne dia una stima.*
2. *Si tracci un diagramma delle biforcazioni (sulle ascisse porre la variabile $a > 0$ e sulle ordinate le configurazioni di equilibrio, indicando con colori differenti la stabilità o l'instabilità di tali punti).*

   (Suggerimento: Usare che l'integrale $\int \frac{-ax^2+2x+2a^2-2}{(x^2-2x+2a)^2} = \frac{ax-1}{x^2-2x+2a} + C$)

Esercizio 5. *(esercizio sui periodi, repetita iuvant) Si consideri il generico sistema meccanico unidimensionale newtoniano:*

$$m\ddot{x} = -V'(x)$$

1. *Si supponga che esista almeno un punto di minimo locale $x_0 \in \mathbb{R}$ per l'energia potenziale del sistema. Si dimostri che sul piano delle fasi localmente vicino al punto $(x_0, 0)$ esiste una traiettoria periodica con dati $(x_-, 0)$ e $(x_+, 0)$ tali per cui esistono due tempi $t_1 > 0, t_2 > 0$ per cui $\varphi((x_-, 0), t_1) = (x_+, 0)$ e $\varphi((x_+, 0), t_2) = (x_-, 0)$*
2. *Dimostrare che per ogni $(x, \dot{x})$ appartenente all'orbita periodica descritta dai due punti, allora $E(x, \dot{x}) - V(x) = (x - x_-)(x_+ - x)\phi(x)$ per qualche funzione $\phi(x)$.*
3. *Concludere che se $\phi(x)$ è strett. crescente nell'intervallo, allora una valida stima per il periodo dell'orbita descritta dai due punti è:*

$$\pi\sqrt{\frac{2m}{\phi(x_+)}} \leq T \leq \pi\sqrt{\frac{2m}{\phi(x_-)}}$$

   In generale se esistono due costanti $C_1, C_2 > 0$ tali che $C_1 \leq \phi(x) \leq C_2$ per ogni $x \in [x_-, x_+]$, allora una valida stima è:

$$\pi\sqrt{\frac{2m}{C_2}} \leq T \leq \pi\sqrt{\frac{2m}{C_1}}$$

4. *Trovare la formula integrale per calcolare la lunghezza dell'orbita sul piano delle fasi.*

Esercizio 6. *(BONUS) Si consideri il seguente sistema dinamico planare:*

$$\begin{cases} \dot{x} = \partial_y W(x, y) \\ \dot{y} = -\partial_x W(x, y) \end{cases} \qquad \text{con } W(x, y) = x^2 + 3y^2 + 2xy + x$$

1. *Si dimostri che $W(x, y)$ è una costante del moto per il sistema;*
2. *Si trovino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità*
3. *Si mostri che la curva di livello $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : W(x, y) = 1\}$ contiene un'orbita periodica e trovi una stima per la lunghezza dell'orbita sul piano delle fasi.*