FM210 Meccanica Analitica
Tutorato 4

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Lorenzo De Leonardis, Laura Fagotto

22/03/2024

"Attraverso un'analisi rigorosa, cercheremo di stabilire connessioni tra simmetrie e leggi di conservazione, aprendo così la strada a una comprensione più profonda dei principi fondamentali della fisica."

Emmy Noether

Esercizio 1. *Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale*

$$V(x) = e^{-x^2} x^2 (x^2 - \alpha).$$

1. *Si consideri esplicitamente il caso $\alpha = 1$.*
   (a) *Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.*
   (b) *Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato.*
   (c) *Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio.*
   (d) *Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.*
2. *Si discuta come cambia lo scenario al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$*

Esercizio 2. *Sia dato il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ soggetta alla forza di energia potenziale*

$$V(x) = (3 - \cos x) + \cos(3x + 5) \text{ con } x \in \mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

1. *Si studi la funzione $V(x)$*
2. *Si studino qualitativamente le curve di livello dell'energia potenziale del corrispondente sistema dinamico*
3. *Si dimostri che la traiettoria con dato iniziale $(x, \dot{x}) = (-\frac{5}{2} + 2\pi, 0)$ è periodica.*
4. *Scrivere il periodo T come integrale definito e darne una stima.*

Esercizio 3. *Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 2$ su $\mathbb{R}$*

$$m\ddot{x} = e^{-x}(2x - x^2)$$

Si risponda alle seguenti domande.

1. *Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.*
2. *Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale.*
3. *Determinare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.*

4. *Analizzare qualitativamente il piano delle fasi* $(x, \dot{x})$.
5. *Si determini per quali energie si hanno traiettorie periodiche.*
6. *Si verifichi che esiste una traiettoria periodica per* $E = -\frac{1}{4}$.
7. *Scrivere il periodo* T *come integrale definito e darne una stima*

Esercizio 4. *Si consideri un punto materiale di massa* $\mu = 1$ *soggetto ad una forza centrale di energia potenziale*

$$V(\rho) = -\frac{1}{4}\rho^4 + 2\rho.$$

1. *Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato;*
2. *Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.*
3. *Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale efficace.*
4. *Analizzare qualitativamente il moto nel piano* $(\rho, \dot{\rho})$.
5. *Determinare le traiettorie periodiche nel piano* $(\rho, \dot{\rho})$.

Esercizio 5. *Un punto materiale di massa* μ *è soggetto a una forza centrale di energia potenziale*

$$V(\rho) = \log\left(\rho + \frac{\alpha}{\rho}\right), \qquad \alpha \geq 0$$

Sia L *il modulo del momento angolare, e si assuma che sia* $L > 0$. *Al variare del coefficiente* α *si risponda alle seguenti domande.*

1. *Si scrivano l'equazione del moto per la variabile* ρ *e per la variabile* θ.
2. *Si disegni il grafico dell'energia potenziale efficace.*
3. *Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato all'equazione per la variabile* ρ *e se ne discuta la stabilità.*
4. *Si studino qualitativamente le orbite nel piano* $(\rho, \dot{\rho})$.
5. *Si determinino le traiettorie periodiche nel piano* $(\rho, \dot{\rho})$.
6. *Si discutano le condizioni sotto le quali il moto complessivo del sistema è periodico.*
7. *Si discuta come cambia lo scenario nel caso in cui si abbia* $L = 0$.
8. *Si risponda alle stesse domande nel caso in cui si abbia* $\alpha < 0$.

Esercizio 6. *(Bonus) Dati tre vettori* $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, *il vettore* $x \wedge (y \wedge z)$ *e lo scalare* $x \cdot (y \wedge z)$ *prendono rispettivamente i nomi di prodotto triplo vettoriale e prodotto misto o prodotto triplo scalare*

1. *Si dimostri che* $x \wedge (y \wedge z) = (x \cdot z)y - (x \cdot y)z$ *per ogni* $x, y, z \in \mathbb{R}^3$.
2. *Si dimostri che* $x \cdot (y \wedge z) = y \cdot (z \wedge x) = z \cdot (x \wedge y)$ *per ogni* $x, y, z \in \mathbb{R}^3$
3. *Si dimostri che nel caso di moti centrali descritti dall'equazione:*

$$\begin{cases} \ddot{R} = 0, \\ \ddot{r} = \frac{1}{\mu}\frac{r}{|r|}F(|r|), \qquad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \end{cases}$$

dove R *prende il nome di coordinata del centro di massa e* r *di coordinata relativa, si ha che:*

$$\ddot{r} \wedge L = -F(\rho)(\dot{\rho}r - \rho\dot{r})$$

(Suggerimento: Si usi che $2r \cdot \dot{r} = (d/dt)r \cdot r = (d/dt)\rho^2 = 2\rho\dot{\rho}$*)*