FM210 Meccanica Analitica
Tutorato 5

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Lorenzo De Leonardis, Laura Fagotto

5/04/2024

"Le leggi di Keplero sono basate su principi matematici semplici ma eleganti."
Joseph-Louis Lagrange

Esercizio 1. *Si consideri un punto materiale di massa μ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale*

$$V(\rho) = \ln(1+\rho^2) - \ln\rho$$

1. *Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.*
2. *Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.*
3. *Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale efficace.*
4. *Analizzare qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.*
5. *Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.*

Esercizio 2. *Si consideri un punto materiale di massa $\mu = 1$ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale*

$$V(\rho) = \ln\rho - \frac{\alpha}{4\rho^2}. \qquad \textit{con} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. *Si consideri esplicitamente il caso $\alpha = 1$*
   - (a) *Si scriva l'equazione del moto e il sistema dinamico associato.*
   - (b) *Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.*
   - (c) *Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale efficace.*
   - (d) *Analizzare qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.*
   - (e) *Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.*
   - (f) *Si discutano le condizioni sotto le quali in generale il moto complessivo del sistema è periodico.*
2. *Si discuta come cambia lo scenario al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Esercizio 3. *Si consideri un punto materiale di massa $\mu = 1$ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale*

$$V(\rho) = \frac{\rho^2}{2} - \alpha\ln(\rho) \qquad \textit{con} \quad \alpha > 0.$$

1. *Si consideri esplicitamente il caso $\alpha = 1$*
   - (a) *Si scriva l'equazione del moto e il sistema dinamico associato.*

(b) *Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.*

(c) *Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale efficace.*

(d) *Analizzare qualitativamente il moto nel piano* $(\rho, \dot{\rho})$.

(e) *Determinare le traiettorie periodiche nel piano* $(\rho, \dot{\rho})$.

(f) *Si discutano le condizioni sotto le quali in generale il moto complessivo del sistema è periodico.*

2. *Si discuta come cambia lo scenario al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4. *Dato un sistema di riferimento* $k = Oxyz$ *(sistema di riferimento fisso o assoluto) si consideri un sistema di riferimento mobile* $K = O'\xi\eta\zeta$ *la cui origine* O' *si muove lungo l'equazione*

$$y = x^2 + 1.$$

Inoltre la componente lungo l'asse x *del vettore che individua il punto* O' *varia secondo la legge oraria* $x_{O'}(t) = t$. *L'asse* ζ *di* K *si mantiene parallelo all'asse* z *di* k *mentre l'asse* η *di* K *si mantiene tangente alla curva* $y = y(x)$.

Un punto materiale P *di massa* $m = 1$ *si muove nel sistema* K *lungo una circonferenza di raggio* $r = 1$ *e di centro* O' *secondo la legge* $\eta(t) = \cos 2t$.

1. *Scrivere la trasformazione rigida* $D : K \to k$ *come composizione di una traslazione con una rotazione* $D = C \circ B$ *e determinare la forma di* C *e* B.

2. *Scrivere la legge del moto nei sistemi* k *e* K.

3. *Determinare la velocità assoluta* v *e la velocità relativa* v'.

4. *Scrivere la componente traslatoria della velocità di trascinamento* v_0.

5. *Scrivere la componente rotatoria della velocità di trascinamento* v_T.

6. *Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto* P.

7. *Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto* P.

Esercizio 5. *(BONUS) Dal Lemma 30.27 del libro [G1], se* $L \neq 0$ *l'orbita su cui si svolge il moto in un campo centrale è data dall'equazione*

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm \frac{\mu\rho^2}{L} \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V_{eff}(\rho)\right)}$$

che prende il nome di prima forma dell'equazione delle orbite.

Posto $u = \frac{1}{\rho}$, *determinare che tale equazione si può riscrivere come*

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\frac{\mu}{L^2} \frac{d}{du} \left[V \left(\frac{1}{u} \right) \right]$$

che prende il nome di seconda forma dell'equazione delle orbite.