FM210 Meccanica Analitica
Tutorato 6

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Laura Fagotto

12/04/2024

"Uno degli strumenti più importanti della fisica è il cestino della carta straccia."

Richard Phillips Feymann

Esercizio 1. *Dato un sistema di riferimento $k = Oxyz$ (sistema di riferimento fisso) si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ la cui origine O' si muove nel piano (x, y) lungo la cruva di equazione*

$$y = x^2(x + 1)(x + 2)$$

La componente lungo l'asse x del vettore che individua il punto O' varia secondo la legge oraria $x_{O'}(t) = t$. L'asse ζ di K si mantiene parallelo all'asse z di k mentre l'asse ξ di K si mantiene sempre tangente alla curva $y = y(x)$. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove nel sistema K lungo una circonferenza di centro O' e raggio $R = 1$ secondo la legge $\xi(t) = \cos 2t$.

- *Scrivere la trasformazione rigida $D : K \to k$ come composizione di una traslazione con una rotazione $D = C \circ B$ e determinare la forma di C e B.*
- *Scrivere la legge del moto (leggi orarie) nei sisitemi k e K.*
- *Determinare la velocità assoluta v e la velocità relativa v'.*
- *Scrivere la componente traslatoria della velocità di trascinamento v_0.*
- *Scrivere la componente rotatoria della velocità di trascinamento v_T.*
- *Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto P.*
- *Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto P.*

Esercizio 2. *Dato un sistema di riferimento $k = Oxyz$ (sistema di riferimento fisso o assoluto) si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ la cui origine O' si muove lungo la circonferenza $\mathcal{C}$ sul piano (x, y) di centro O e raggio $r = 2$. La componente lungo l'asse x che individua il punto O' varia secondo la legge oraria $x'_O(t) = 2\cos(\omega_1 t)$ con $\omega_1 > 0$ costante. L'asse ζ di K si mantiene parallelo all'asse z di k mentre l'asse η di K si mantiene orgogonale a $\mathcal{C}$. All'istante iniziale il punto O' occupa la posizione $q_{O'} = (2, 0, 0)$. Un punto P di massa $m = 1$ si muove nel sistema K lungo l'asse η secondo la legge oraria $\eta(t) = \cos(t)$.*

- *Scrivere la trasformazione rigida $D : K \to k$ come composizione di una traslazione con una rotazione $D = C \circ B$ e determinare la forma di C e B.*
- *Scrivere la soluzione delle equazioni del moto $q(t)$ nel sistema k e $Q(t)$ nel sistema K.*
- *Determinare la velocità assoluta v e la velocità relativa v'.*
- *Scrivere la componente traslatoria della velocità di trascinamento v_0.*
- *Scrivere la componente rotatoria della velocità di trascinamento v_T.*

- *Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto P.*
- *Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto P.*

Esercizio 3. *Si consideri il sistema meccanico descritto dall'equazione*

$$\ddot{x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4}.$$

1. *Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.*
2. *Studiare il grafico dell'energia potenziale.*
3. *Determinare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.*
4. *Analizzare qualitativamente il piano delle fasi* $(x, \dot{x})$.
5. *Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche e verificare in particolare che esiste una traiettoria periodica ad energia* $E = -\frac{3}{8}$.
6. *Scrivere il periodo* T *come integrale definito e darne una stima.*

Esercizio 4. *Si consideri un punto materiale di massa* μ *soggetto ad una forza centrale di energia potenziale*

$$V(\rho) = \log\left(\frac{3\rho^2 + 2}{2\rho}\right)$$

1. *Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.*
2. *Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.*
3. *Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale efficace.*
4. *Analizzare qualitativamente il moto nel piano* $(\rho, \dot{\rho})$.
5. *Determinare le traiettorie periodiche nel piano* $(\rho, \dot{\rho})$.

Esercizio 5. *(BONUS)*

1. *Si consideri l'equazione* $\ddot{Q} = F - 2(\Omega \wedge \dot{Q}) - \Omega \wedge (\Omega \wedge Q)$ *in* $\mathbb{R}^3$. *Si mostri che l'equazione si può riscrivere nella forma* $\ddot{Q} = F - 2A\dot{Q} - A^2 Q$, *dove* A *è la matrice antisimmetrica (ovvero* $A_{ij} = -A_{ji}$ *per ogni* i, j*) con componenti* $A_{12} = -\Omega_3, A_{13} = \Omega_2, A_{23} = -\Omega_1$.
2. *Si consideri il sistema di riferimento* K *del pendolo di Foucault (come visto a lezione), si consideri l'equazione:*
$$\ddot{Q} = F - 2(\Omega \wedge \dot{Q}) - \Omega \wedge (\Omega \wedge Q)$$
con $\Omega = (-\Omega\cos\lambda, 0, \Omega\sin\lambda)$, *dove* λ *è la notazione semplificata per* λ_{eff}. *Si mostri che la soluzione si può scrivere nella forma* $Q(t) = U(t)x(t)$, *dove* $U(t) = e^{-At}$, *con* $A = \Omega\Lambda$ *e*
$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\lambda & 0 \\ \sin\lambda & 0 & \cos\lambda \\ 0 & -\cos\lambda & 0 \end{pmatrix}$$
e $x = x(t)$ *risolve l'equazione* $\ddot{x} = U^{-1}F$.