

FM210 Meccanica Analitica

Tutorato 7

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Francesco Caristo, Laura Fagotto

03/05/2024

"Se l'uomo non sapesse di Matematica non si eleverebbe di un sol palmo da terra!"

Galileo Galilei

Esercizio 1. Consideriamo un punto P di massa m nel piano orizzontale xy vincolato a due molle, entrambe con costante elastica k . La prima molla ha l'altra estremità fissata nel punto $A = (0, d_1)$, la seconda nel punto $A = (d_2, 0)$. Si scriva la lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.

Esercizio 2. Si consideri un pendolo costituito da una molla di lunghezza di riposo l sospesa a un punto di sospensione O , al cui estremo libero è appesa una massa m (vedi Figura 1). Si scriva la lagrangiana del sistema usando le coordinate x e θ , dove $l + x$ è la lunghezza della molla e θ l'angolo formato con la verticale verso il basso, come in figura. Si determinino le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.

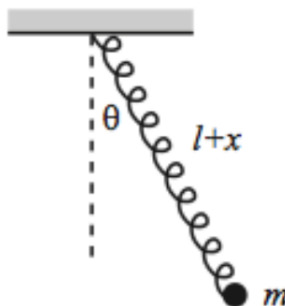


Figura 1: Disegno esplicativo.

Esercizio 3. Dato il sistema bidimensionale descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = q_2 \dot{q}_1 - q_1 \dot{q}_2 - 2q_1 q_2$$

1. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange
2. Se ne trovi la soluzione, al variare del dato iniziale.
3. Si determini una costante del moto per il sistema.

Esercizio 4. Si consideri un piano verticale xy , dove un punto P è vincolato a muoversi su una guida circolare di raggio unitario e centrata nell'origine. Inoltre, è presente un altro punto Q che si muove sulla retta $x = 2$. Entrambi i punti hanno massa m . In aggiunta, i punti sono collegati da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla.

1. Si scriva la lagrangiana del sistema, usando come coordinate lagrangiane l'ordinata del punto Q e l'angolo φ compreso tra il vettore posizione di P e l'asse x .

2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Esiste una configurazione d'equilibrio per $\varphi = \frac{\pi}{2}$?
4. Si trovino le configurazioni di equilibrio in assenza di gravità e si discuta la loro stabilità.

Esercizio 5. Si consideri il sistema lagrangiano costituito da un punto materiale P di massa m , vincolato a muoversi in un piano verticale, che identificheremo con il piano xy , lungo una guida descritta dall'equazione $y = x^2$. Il piano verticale ruota intorno all'asse verticale y con velocità angolare costante ω . Il punto P è sottoposto alla forza di gravità ed è collegato all'estremo di una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla, che ha l'altro estremo fissato nell'origine. Sia g l'accelerazione di gravità.

1. Si scrivano la Lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si trovino le configurazioni di equilibrio in un sistema di riferimento solidale con il piano rotante.
3. Si discuta la stabilità di ogni configurazione di equilibrio.
4. Si determini la forza vincolare che agisce sul punto P in corrispondenza di una configurazione di equilibrio stabile (se esiste) per i valori dei parametri $\omega = \sqrt{11}$, $m = g = k = 1$.