FM210 Meccanica Analitica
Tutorato 8

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Francesco Caristo, Laura Fagotto

10/05/2024

"Nel creare il mondo Dio ha usato della bella matematica."

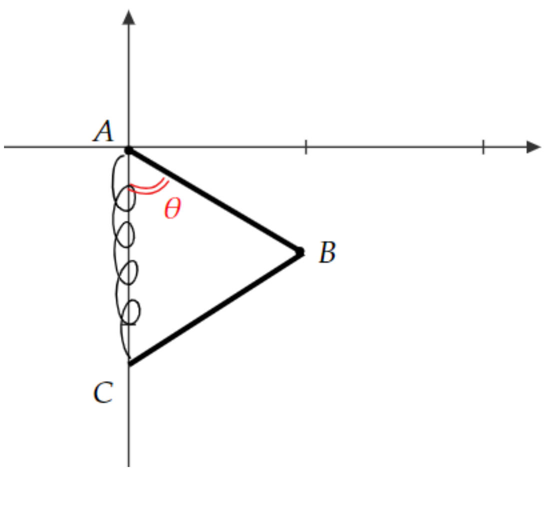
Paul Dirac

Esercizio 1. *Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi nel piano verticale xy, lungo il profilo descritto dall'equazione $y = 3x - x^3$, sotto l'azione della forza di gravità (si indichi con g l'accelerazione di gravità). Inoltre il piano xy ruota intorno all'asse verticale y con velocità angolare costante ω.*

1. *Si scrivano la lagrangiana del sistema (come coordinata lagrangiana si usi l'asciassa x del punto P) e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.*
2. *Si determinino le configurazioni di equilibrio relativo e se ne discuta la stabilità.*
3. *Si determini la forza vincolare che agisce su P in corrispondenza di una configurazione di equilibrio relativo.*

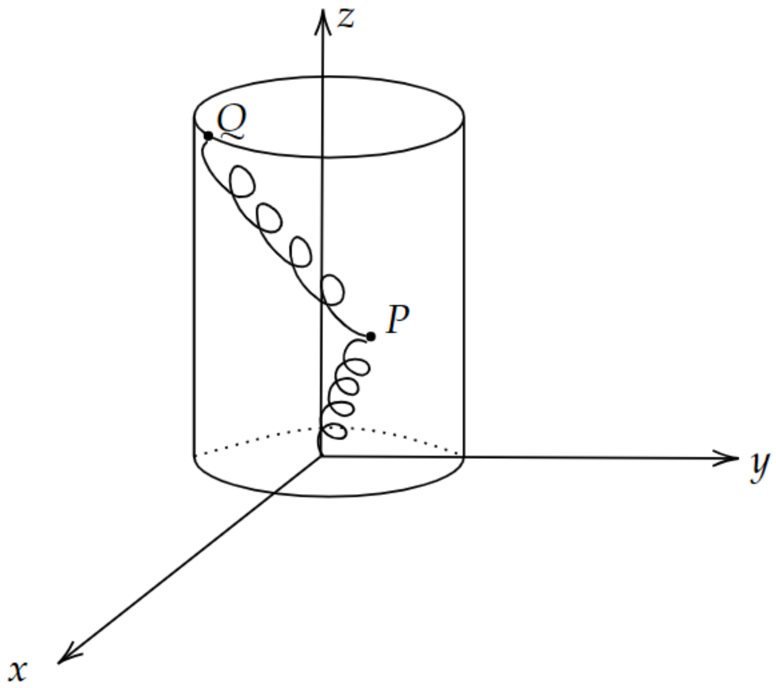
Esercizio 2. *Un sistema meccanico è costituito da due sbarre uguali, rettilinee, omogenee, di massa m e lunghezza l, vincolate a muoversi su un piano verticale e incernierate in modo da avere l'estremo B in comune. La sbarra AB ha l'estremo A fissato nell'origine degli assi cartesiani, mentre l'estremo C della sbarra BC è vincolata a scorrere sull'asse verticale, come descritto in figura. Inoltre, è presente una molla di costante elastica k incernierata nell'origine e collegata al punto C.*

1. *Si scriva la lagrangiana del sistema usando come coordinata l'angolo θ in figura.*
2. *Si determinino le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange*
3. *Determinare le configurazioni d'equilibrio e specificarne la natura al variare di k.*



Esercizio 3. *Si consideri un cilindro circolare retto, di raggio* 1 *e altezza* 2*, un punto* P *che si muove sulla superficie laterale e un punto* Q *vincolato a muoversi sul bordo della base superiore. I due punti hanno entrambi massa* m *e sono collegati da una molla di costante elastica* k*. Inoltre, il punto* P *è legato ad una molla incernierata nell'origine, come mostra la figura.*

1. *Si scriva la lagrangiana del sistema usando come coordinate lagrangiane:*
   - *l'altezza del punto* P*;*
   - *l'angolo* θ_1 *che si forma tra l'asse* x *e la proiezione del punto* P *sul piano* xy*;*
   - *l'angolo* θ_2 *che si forma tra l'asse* x *e la proiezione del punto* Q *sul piano* xy*.*
2. *Si determinino le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.*
3. *Determinare le configurazioni d'equilibrio e specificarne la natura.*



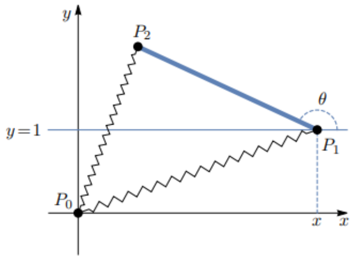
Esercizio 4. *Un sistema meccanico è costituito da 3 punti materiali* P_0, P_1 *e* P_2 *di massa* m *che si muovono in un piano, che identifichiamo con* xy*, in modo da soddisfare i seguenti vincoli:*

- *il punto* P_0 *è fissato nell'origine;*
- *il punto* P_1 *si muove lungo la retta* $y = 1$*;*
- *il punto* P_2 *è collegato a* P_1 *tramite un'asta di lunghezza* l *e massa trascurabile;*
- *due molle con costante elastica* k *e lunghezza a riposo nulla, collegano* P_1 *e* P_2 *al punto* P_0*.*

I punti inoltre sono sottoposti alla forza di gravità, diretta verso il basso lungo l'asse y*; sia* g *l'accelerazione di gravità.*

1. *Si scriva la lagrangiana del sistema, usando come coordinate lagrangiane l'ascissa* x *di* P_1 *e l'angolo* θ *che forma l'asta con l'asse* x*.*
2. *Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.*
3. *Si determinino le configurazioni di equilibrio in funzione dei parametri positivi* m, g *e* k*.*

4. *Se ne discuta la stabilità al variare dei parametri.*



Esercizio 5. *Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su un iperboloide liscio di equazioni parametriche:*

$$\begin{cases} x = a\sqrt{1+u^2}\cos\theta \\ y = a\sqrt{1+u^2}\sin\theta \\ z = bu \end{cases}$$

con $a, b > 0$, $u \in \mathbb{R}$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Il punto P è collegato all'origine O tramite una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si trascurino gli effetti della gravità.

1. *Si scriva la lagrangiana del sistema.*
2. *Si riconosca una variabile ciclica e si utilizzi il metodo di Routh per ricavare la lagrangiana ridotta.*
3. *Trovare le configurazioni d'equilibrio del sistema descritto dalla lagrangiana ridotta al variare dei parametri p, a, b, m e k, dove p è il momento coniugato alla variabile ciclica.*
4. *Assumendo $b = \sqrt{3}a$ e $c^2 = 16mka^2$ discutere la stabilità delle configurazioni d'equilibrio trovate nel punto precedente.*

Attenzione! *L'iperboloide è una superficie di rotazione. In poche parole, presa una curva nel piano xz, viene fatta ruotare intorno all'asse z, come in figura.*

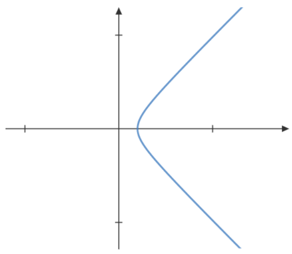


Figura 1: Curva nel piano xz.

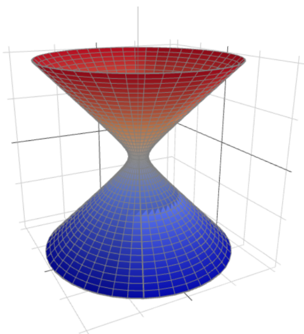


Figura 2: Curva ruotata intorno all'asse z.