FM210 Meccanica Analitica
Tutorato 9

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Francesco Caristo, Laura Fagotto

17/05/2024

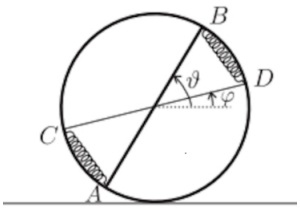
"I matematici non studiano gli oggetti, ma le relazioni fra oggetti. Così sono liberi di sostituire questi oggetti con altri purché le relazioni non varino. Il contenuto è per essi, irrilevante, ciò che conta è la forma."

Henry Poincarè

Esercizio 1. *Due punti materiali di masse $m > 0$ e $2m > 0$ sono vincolati a muoversi in un piano verticale xy lungo due guide di equazione, rispettivamente, $y = x$ e $y = h$, $h \in \mathbb{R}$. I due punti sono soggetti alla forza di gravità e sono collegati da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Inoltre, il secondo punto è collegato ad un'altra molla identica fissata nell'origine.*

1. *Si scriva la lagrangiana del sistema, usando come coordinate lagrangiane le ascisse dei punti.*
2. *Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.*
3. *Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.*

Esercizio 2. *Un anello omogeneo di massa M e raggio R può rotolare senza strisciare su una guida rettilinea orizzontale. Un'asta omogenea di massa m e lunghezza $2R$ può ruotare nel piano dell'anello, mantenendo il suo punto medio coincidente col centro dell'anello. Sul sistema agiscono due forze elastiche di ugual costante elastica k che legano gli estremi A e B dell'asta a due punti C e D diametralmente opposti dell'anello. Si faccia riferimento alle coordinate lagrangiane φ e θ indicate in figura.*



1. *Si scriva la lagrangiana del sistema e, utilizzando il teorema di Noether, si costruisca una costante del moto diversa dall'energia.*
2. *Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne studi la stabilità.*

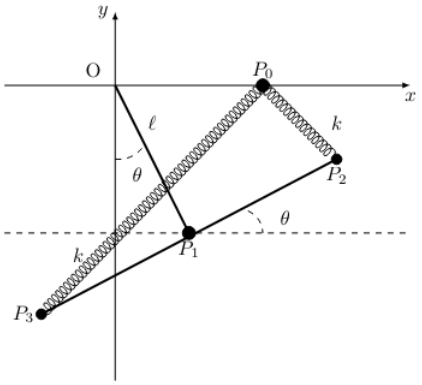
Esercizio 3. *Un sistema meccanico è costituito da 4 punti materiali P_0, P_1, P_2 e P_3 tutti di massa m, vincolati a muoversi nel piano verticale xy nel modo seguente*

- *P_0 si muove lungo l'asse x;*
- *P_1 è collegato all'origine tramite un'asta A_1 di massa trascurabile e lunghezza $l_1 = 1$;*
- *P_1 è il punto medio di un'altra asta A_2 di massa trascurabile e lunghezza $l_2 = 2$, che si mantiene ortogonale all'asta A_1 e ai cui estremi sono collocati i punti P_2 e P_3;*

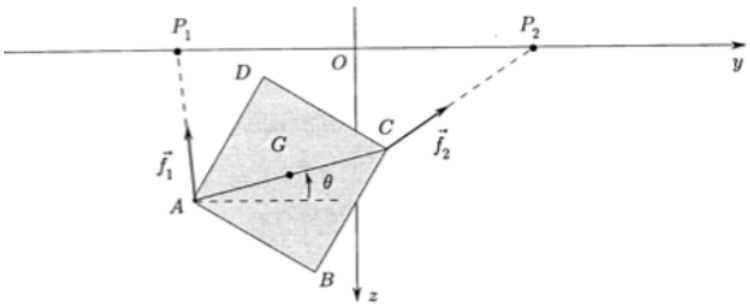
- *due molle, entrambe di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile, collegano i punti P_2 e P_3 al punto P_0.*

Si risponda alle seguenti domande.

1. *Si scriva la lagrangiana del sistema (come coordinate lagrangiane si possono utilizzare l'ascissa x del punto P_0 e l'angolo θ che l'asta A_1 forma con l'asse y negativo, come illustrato in figura).*
2. *Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.*
3. *Si determinino le configurazioni d'equilibrio e se ne discuta la stabilità.*



Esercizio 4. *Una lamina piana quadrata $ABCD$, omogenea, di massa M e lato l, è vincolata a muoversi su un piano verticale, che identifichiamo col piano yz. Sui vertici A e C agiscono due forze elastiche di costante elastica k, centrate nei punti $P_1 = (-d, 0)$ e $P_2 = (d, 0)$.*



1. *Si scriva la lagrangiana del sistema, usando come coordinate lagrangiane le coordinate (y, z) del centro di massa e l'angolo θ in figura.*
2. *Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.*
3. *Si trovino le configurazioni d'equilibrio e se ne discuta la stabilità.*
4. *Si risolvano le equazioni di Eulero-Lagrange per y e z e si riconosca il tipo di sistema descritto dall'equazione in θ.*

Esercizio 5. *Un punto materiale di massa m vincolato a muoversi sulla superficie di equazione $z = \sqrt{l^2 + x^2 + y^2}$. Il punto è all'estremo di una molla di costante elastica k, che ha l'altro estremo fissato nell'origine. Sul punto agisce anche la forza di gravità, verso la direzione negativa dell'asse z.*

1. *Si parametrizzi la superficie del vincolo usando opportune coordinate e si scrivano la lagrangiana e le equazioni del moto. (Attenzione, una superficie di rotazione! Quali sono le coordinate più indicate in questo caso?)*

2. *Si trovino le posizioni di equilibrio e si discuta la loro stabilità.*

3. *Ridurre i gradi di libertà dopo aver individuato la variabile ciclica. Svolgere l'analisi qualitativa del sistema relativo alla lagrangiana ridotta.*

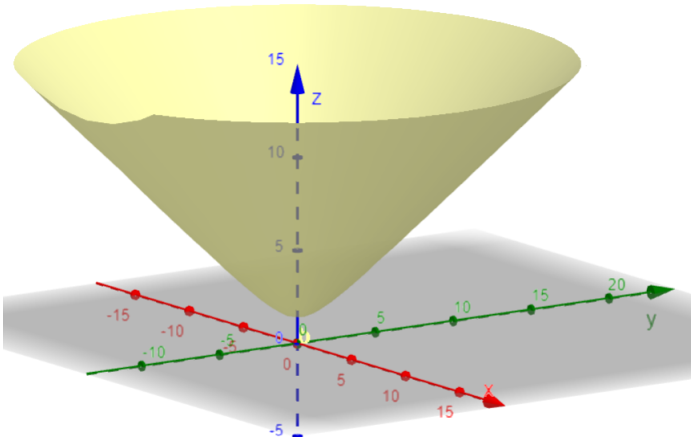


Figura 1: Grafico della superficie descritta da $z = -\sqrt{l^2 + x^2 + y^2}$.