Corso di Laurea in Matematica – Anno Accademico 2023/2024

FM440 - Sistemi dinamici

Esercizi - Prima Settimana

<u>Esercizio 1.</u> Sia $S\colon [0,1] \to [0,1]$ l'applicazione definita da

$$Sx = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1/2, \\ 2(1-x), & 1/2 \le x \le 1. \end{cases}$$

Si dimostri che la misura di Lebesgue è S-invariante.

<u>Esercizio 2.</u> Sia S l'applicazione dell'esercizio 1 e sia $\mathcal{P} = \{[0,1/2),[1/2,1]\}$. Si determini una relazione tra la $(\mathcal{P}, S)$-storia di un punto $x \in [0,1]$ e la sua espansione binaria

$$x = \sum_{k \ge 0} \gamma_k 2^{-k}, \quad \gamma_k = 0, 1.$$

<u>Esercizio 3.</u> Siano $S\colon [0,1] \to [0,1]$ e $T\colon [0,1] \to [0,1]$ due applicazioni regolari. Si assuma che esista un isomorfismo $F\colon [0,1] \to [0,1]$ di classe C^1 tale che $T \circ F = F \circ S$. Si dimostri che se esiste una misura $\mu_T(dx) = f(x)\mathrm{d}x$ assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue e T-invariante, allora $\mu_S(dx) := f(F(x))\,|F'(x)|\,\mathrm{d}x$ è una misura S-invariante.

<u>Esercizio 4.</u> Si costruisca un esempio di sistema dinamico non hamiltoniano che ammetta un integrale primo non banale di classe C^∞.

<u>Esercizio 5.</u> Si dimostri che il sistema dinamico continuo definito dall'equazione di Lorenz ammette soluzioni globali nel tempo.

<u>Esercizio 6.</u> Sia $S : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ tale che

$$S\varphi = A\varphi \mod 2\pi, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che non esiste un campo vettoriale f definito su $\mathbb{T}^2$ il cui flusso a tempo uno coincide con S.

<u>Esercizio 7.</u> Si consideri il sistema dinamico dell'esercizio 6. Si mostri che ogni partizione $\mathcal{P}$ di $\mathbb{T}^2$ in insiemi boreliani di diametro sufficientemente piccolo è tale che S è $\mathcal{P}$-espansiva.

<u>Esercizio 8.</u> Si trovi un esempio di sequenza $\underline{\sigma} \in \{0,\ldots,1\}^{\mathbb{Z}}$ che non abbia frequenze definite.

<u>Esercizio 9.</u> Siano $a_0 = 1 < a_1 < a_2 \ldots < a_n = 1$, e sia $\mathcal{P} = \{P_0, \ldots, P_{n-1}\}$ la partizione di $[0,1]$ tale che $P_j = [a_j, a_{j+1})$ per $j = 0, \ldots, n-2$, e $P_{n-1} = [a_{n-1}, 1]$. Data un'applicazione $S\colon [0,1] \to [0,1]$, tale che

$$S|_{P_j} : P_j \to [0,1]$$

sia continua, strettamente monotona e suriettiva, si consideri il sistema dinamico $([0,1], S)$. Si mostri che per ogni $N \geq 1$ gli insiemi

$$P^{\sigma_0,\ldots,\sigma_{N-1}}_{0,\ldots,N-1} := \bigcup_{j=0}^{N-1} S^{-j} P_{\sigma_j}$$

sono intervalli.

<u>Esercizio 10.</u> Sotto le stesse ipotesi dell'esercizio 9, si assuma inoltre che S sia di classe C^1 in ciascun intervallo $\mathrm{Int}(P_j)$ e che esista $\lambda > 1$ tale che $|S'(x)| > \lambda$ per ogni $x \in \cup_{j=0}^{n-1} \mathrm{Int}(P_j)$. Si mostri che S è $\mathcal{P}$-espansiva e che, per ogni $N \geq 1$ e per ogni $\sigma_0, \ldots, \sigma_{N-1}$,

$$\mathrm{diam}\Big(\bigcap_{j=0}^{N-1} S^{-j} P_{\sigma_j} \Big) \leq \lambda^{-N}.$$

<u>Esercizio 11.</u> Sia $W := \{1, \ldots, n\}$ e sia $\pi \in S_n$ una permutazione di W. Si definisca $S : W \to W$ ponendo $S(i) = \pi(i)$ per $i \in W$ e indichi con $\mathcal{P}$ la partizione di W nei suoi elementi. Si mostri che la $(\mathcal{P}, S)$-storia di ciascun punto $i \in W$ ha frequenze definite. Qual è il significato delle frequenze in termini dei cicli di π?

<u>Esercizio 12.</u> Si consideri il sistema dinamico discreto $(\mathbb{T}, S)$, dove S è la rotazione di $\mathbb{T}$ con vettore di rotazione ρ. Nel caso in cui ρ e 2π siano razionalmente indipendenti, si dimostri che la partizione $\mathcal{P} = \{[0, \pi/2), [\pi/2, \pi), [\pi, 3\pi/2), [3\pi/2, 2\pi]\}$ è S-separante e si discuta se S è espansiva rispetto a $\mathcal{P}$.