

Corso di Laurea in Matematica – Anno Accademico 2023/2024

FM440 - Sistemi dinamici

ESERCIZI - SECONDA SETTIMANA

ESERCIZIO 1. Si dimostri che se una sequenza σ è mescolante, allora σ è anche ergodica.

ESERCIZIO 2. Con riferimento alla dimostrazione del teorema di Birkhoff, si fissi $N = 4$ e si discuta esplicitamente la struttura degli insiemi $S^i \Delta_i$, per $i = 1, \dots, 4$ e $j = 0, \dots, i - 1$. In particolare si mostri che sono disgiunti e che la loro unione è $D^{(1)} \cup D^{(2)} \cup D^{(3)} \cup D^{(4)}$.

ESERCIZIO 3. Sia (Ω, S, μ) un sistema dinamico metrico. Si verifichi che le seguenti proprietà sono equivalenti, dimostrando le implicazioni $(1) \implies (2) \implies (3) \implies (1)$:

(1) Il sistema è ergodico, ovvero per ogni coppia di insiemi $E, F \subset \Omega$ misurabili si ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mu(E \cap S^{-j} F) = \mu(E) \mu(F).$$

(2) Ogni insieme S -invariante A in Ω ha misura $\mu(A) = 0$ oppure $\mu(A) = 1$.

(3) Per ogni funzione μ -misurabile $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(S^j x) = \int_{\Omega} f(x') \mu(dx') \quad \mu\text{-q.o. in } \Omega.$$

Si estenda il risultato richiedendo al punto (3) solo che la funzione f sia continua.

ESERCIZIO 4. Sia (Ω, S, μ) un sistema dinamico metrico. Si verifichi che le seguenti proprietà sono equivalenti:

(1) Il sistema è mescolante, ovvero per ogni coppia di insiemi $E, F \subset \Omega$ misurabili si ha

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(E \cap S^{-j} F) = \mu(E) \mu(F).$$

(2) Per ogni coppia di funzioni $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ in $L_2(\Omega, \mu)$ si ha

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_{\Omega} f(S^j x') g(x') \mu(dx') = \int_{\Omega} f(x') \mu(dx') \int_{\Omega} g(x'') \mu(dx'').$$

Si estenda il risultato richiedendo al punto (2) solo che le funzioni f e g siano continue.

ESERCIZIO 5. Si dimostri che il sistema dinamico metrico (Ω, S, μ) , dove $\Omega = \{0\}$, $S0 = 0$ e $\mu(\{0\}) = 1$, è ergodico e mescolante. Si dimostri che, invece, il sistema dinamico metrico (Ω, S, μ) , dove $\Omega = \{0, 1\}$, $S0 = 1$ e $S1 = 0$, e $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = 1/2$, è ergodico ma non mescolante.

ESERCIZIO 6. Si dimostri che se (Ω, S^2, μ) è un sistema dinamico ergodico allora anche (Ω, S, μ) è ergodico. Si dimostri, utilizzando l'esercizio 5 per produrre un controesempio, che il viceversa in generale è falso.

ESERCIZIO 7. Si dimostri che (Ω, S^2, μ) è un sistema dinamico mescolante se e solo se lo è (Ω, S, μ) .

ESERCIZIO 8. Sia (Ω, μ) un sistema dinamico invertibile. Si dimostri che se il sistema è ergodico allora lo è anche (Ω, S^{-1}, μ) .

ESERCIZIO 9. Sia (Ω, μ) un sistema dinamico invertibile, e sia U l'operatore lineare definito in $L_2(\Omega, \mu)$ come $(Uf)(x) = f(Sx)$. Si dimostri che se il sistema è ergodico se e solo se l'equazione di punto fisso $Uf = f$ ammette solo la soluzione costante.

ESERCIZIO 10. Sia (Ω, μ) un sistema dinamico invertibile, e sia U l'operatore lineare definito in $L_2(\Omega, \mu)$ come $(Uf)(x) = f(Sx)$. Si dimostri che se esistono $\lambda \neq 1$ e $f \neq 0$ tali che $Uf = \lambda f$ allora il sistema non è mescolante.