

Corso di Laurea in Matematica – Anno Accademico 2023/2024

FM440 - Sistemi dinamici

ESERCIZI - TERZA SETTIMANA

ESERCIZIO 1. Costruire una sequenza in $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ tale che tutte le stringhe di lunghezza $\leq N_0$ abbiano frequenze definite e positive.

ESERCIZIO 2. Siano $k > 0$ e $f : \{0, \dots, n\}^k \rightarrow \{0, \dots, n\}$, e si fissi arbitrariamente $(\dots, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}) \in \{0, \dots, n\}^{\mathbb{Z} < 0}$. Per ogni $i \geq 0$ si definisca induttivamente $\sigma_i = f(\sigma_{i-1}, \dots, \sigma_{i-k})$ e sia $\sigma := \{\sigma_h\}_{h \in \mathbb{Z}}$. Mostrare che σ ha entropia nulla, i.e. “non è possibile costruire sequenza complesse con un algoritmo finito”.

ESERCIZIO 3. Sia $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ una sequenza con distribuzione di Bernoulli $B(1/3, 2/3)$. Mostrare che

$$s(\sigma) = -\frac{1}{3} \log \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \log \frac{2}{3}.$$

ESERCIZIO 4. Si consideri la sequenza $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ costituita di n_0 volte “zero”, seguiti da n_0 volte “uno”, seguito da n_1 volte “zero” e così via, con n_j tali che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{n_{k+1}}{n_0 + \dots + n_k} = 0.$$

Mostrare che σ ha frequenze definite e calcolarne l’entropia.