Corso di Laurea in Matematica – Anno Accademico 2023/2024

FM440 - Sistemi dinamici

Esercizi - Matrici di compatibilità e pavimenti di Markov

Esercizio 1 In riferimento alla dimostrazione del teorema di Perron-Frobenius, nel caso di una matrice T con elementi (strettamente) positivi (cfr. gli esercizi 2.3.7–2.3.10), si trovi una stima dal basso per le componenti dell'autovettore π^* della matrice trasposta di T.

Esercizio 2 Si discuta se il teorema di Perron-Frobenius per matrici transitive, considerato a lezione nel caso di matrici di compatibilità, si estenda al caso di una qualsiasi matrice i cui elementi siano tutti non negativi.

Esercizio 3 Si dimostri che, dato un sistema dinamico metrico invertibile (Ω, S, μ) e una funzione μ-misurabile, i due limiti

$$\bar{f}^+(x) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(S^j x), \qquad \bar{f}^-(x) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(S^{-j} x)$$

esistono e coincidono μ-quasi ovunque (cfr. l'esercizio 2.2.46).

Esercizio 4 Si consideri la matrice di compatibilità

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Se ne determinino il grafico di compatibilità, le classi e i periodi corrispondenti.
(2) Si dimostri che, a meno di un riordinamento degli indici, esistono $q, p \in \mathbb{N}$ tali che T^q è una matrice a blocchi e i blocchi di T^{qp} hanno tutti gli elementi (strettamente) positivi.
(3) Si calcolino gli autovalori e gli autovettori di T e se ne discuta la relazione con gli autovalori di modulo massimo e i corrispondenti autovettori della matrice T^{qp}.

Esercizio 5 Si considerino le matrici di compatibilità

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

degli esercizi 4.3.6 e 4.3.7, rispettivamente, e se ne calcolino gli autovalori. Si dimostri inoltre che le matrici sono mescolanti.

<u>Esercizio 6</u> Un pavimento di Markov, definito in accordo con la definizione 4.1.3, è a volte chiamato *pavimento di Markov generante*. Un pavimento di Markov *non generante* è invece definito come nella definizione 4.1.3, senza però richiedere la condizione (i) che $\chi(\underline{\sigma})$ debba essere costituito da un unico punto. Si dimostri che se $\mathcal{Q}$ è un pavimento di Markov generante per il sistema (Ω, S), allora è un pavimento di Markov, non necessariamente generante, anche per (Ω, S^2), mentre un pavimento di Markov generante per (Ω, S^2) non è necessariamente un pavimento di Markov per (Ω, S), ma, se lo è, allora è ancora generante.

<u>Esercizio 7</u> Sia $\mathcal{Q} = \{Q_1, \ldots, Q_n\}$ un pavimento per il sistema dinamico (Ω, S) che verifichi le condizioni (ii)–(iv) della definizione 4.1.3. Si argomenti che se esistono $Q, Q' \in \mathcal{Q}$ tali che $SQ \cap Q'$ è costituito da due o più insiemi con interni sconnessi allora $\mathcal{Q}$ può non essere un pavimento di Markov generante.

<u>Esercizio 8</u> Si costruisca un pavimento di Markov generante per il gatto di Arnold costituito da 5 rettangoli, raffinando il pavimento di Markov del sistema dinamico dell'esercizio 4.3.7, e se ne trovi la matrice di compatibilità corrispondente.

<u>Esercizio 9</u> In riferimento all'esercizio precedente, si verifichi esplicitamente che la matrice di compatibilità è mescolante e che i suoi autovalori oltre all'autovalore λ del gatto di Arnold, sono λ^{-1}, 0 e radici dell'unità.

<u>Esercizio 10</u> Si discuta se il pavimento di Markov della figura seguente, costituito da 3 S-rettangoli, sia generante per il gatto di Arnold, e se ne calcoli la matrice di compatibilità. Se ne calcolino in particolare gli autovalori e si confronti il risultato con quelli degli esercizi precedenti.