

Matematica I (CdL in Scienze Geologiche)

Anno Accademico 2023-2024

Prova scritta - Primo appello (01-02-2024)

ESERCIZIO 1. [5+1] Si studi il dominio di due delle seguenti tre funzioni:

$$f(x) = \frac{\ln(\ln x)}{\ln(1+x)}, \quad g(x) = \sqrt{(x^3-1)(x-3)}, \quad h(x) = \ln(4e^x - e^{-x}).$$

FACOLTATIVO: Si studi il dominio dell'altra funzione.

ESERCIZIO 2. [6+1] Si calcolino due dei tre seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{tg} x)^2 \ln(1 + \sin x)}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} - \cos(2x)}{e^{2x^4} - \cos(2x^2)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{(1-x)(1+2x)} - \sqrt{(1-2x)(1+3x)}}{x^2}.$$

FACOLTATIVO: Si calcoli l'altro limite.

ESERCIZIO 3. [10] Si studi il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = e^{-x^2} \sqrt{x^2 + 2}.$$

In particolare

1. si determini il dominio D_f della funzione,
2. si studi l'esistenza di eventuali asintoti orizzontali, obliqui o verticali,
3. si determinino gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo,
4. si discuta dove la funzione è crescente e dove è decrescente,
5. si discuta dove la funzione è convessa e dove è concava,
6. si disegni il grafico della funzione

Una volta completato il grafico si determini il codominio C_f della funzione.

ESERCIZIO 4. [5+1] Si discuta se i seguenti tre vettori sono linearmente indipendenti:

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{v}_2 = (-1, 1, -2), \quad \vec{v}_3 = (1, 3, 0),$$

e si calcolino il prodotto scalare $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ e il prodotto vettoriale $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$.

FACOLTATIVO: Si calcolino i prodotti vettoriale $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_3$, $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3$ e $(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3$.

ESERCIZIO 5. [5+1] Si calcolino gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si verifichi in particolare che gli autovettori sono ortogonali.

FACOLTATIVO: Si dimostri che A è invertibile e si calcoli la matrice inversa A^{-1} .

ESERCIZIO 6. [5] Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Si calcolino massimi e minimi di $f(x, y)$ nel dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
