

Matematica I (CdL in Scienze Geologiche)

Anno Accademico 2023-2024

Prova scritta - Secondo appello (15-02-2024)

ESERCIZIO 1. [5+1] Si studi il dominio di due delle seguenti tre funzioni:

$$f(x) = (|x-1| - (x+1))^{1/4}, \quad g(x) = \ln((1+x^3)(1-x)), \quad h(x) = \sqrt{e^{2x} - e^{-x}}.$$

FACOLTATIVO: Si studi il dominio dell'altra funzione.

ESERCIZIO 2. [6+1] Si calcolino due dei tre seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x-\sin x} - 1}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^2(x-2)^4(3-x)^3}{x^5(x+1)^2(7-x)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1+x^2)(1+2x^2)} - \sqrt{(1-x^2)(1+4x^2)}}{x^4}.$$

FACOLTATIVO: Si calcoli l'altro limite.

ESERCIZIO 3. [10] Si studi il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = e^{-x^2}(1-x^2)^2.$$

In particolare

1. si determini il dominio D_f della funzione,
2. si studi l'esistenza di eventuali asintoti orizzontali, obliqui o verticali,
3. si determinino gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo,
4. si discuta dove la funzione è crescente e dove è decrescente,
5. si discuta dove la funzione è convessa e dove è concava,
6. si disegni il grafico della funzione

Una volta completato il grafico si determini il codominio C_f della funzione.

ESERCIZIO 4. [5+1] Si discuta se i seguenti tre vettori sono linearmente indipendenti:

$$\vec{v}_1 = (2, -4, 5), \quad \vec{v}_2 = (-1, 3, -3), \quad \vec{v}_3 = (4, 0, 6),$$

e si calcolino il prodotto scalare $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ e il prodotto vettoriale $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_3$.

FACOLTATIVO: Si calcolino i prodotti vettoriale $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_3$, $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3$ e $\vec{v}_3 \wedge \vec{v}_3$.

ESERCIZIO 5. [5+1] Si calcolino gli autovalori e gli autovettori delle due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

e si discuta l'invertibilità delle due matrici.

FACOLTATIVO: Si calcolino le matrici A^2 e B^2 e si usi il risultato per calcolare A^8 e B^8 .

ESERCIZIO 6. [6] Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^4 - yx^2 + y^2}.$$

Si calcolino massimi e minimi di $f(x, y)$ nel dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.
