

Matematica I (CdL in Scienze Geologiche)

Anno Accademico 2023-2024

Prova scritta - Terzo appello (02-04-2024)

ESERCIZIO 1. [5+1] Si studi il dominio di due delle seguenti tre funzioni:

$$f(x) = \sqrt{(3 - \ln x)(1 - \ln x)}, \quad g(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}, \quad h(x) = \frac{|x| - 1}{|x| + x^2}.$$

FACOLTATIVO: Si studi il dominio dell'altra funzione.

ESERCIZIO 2. [6+1] Si calcolino due dei tre seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x^4 + x^6} - x - x^2}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 + x^2) - \ln(2 - x^2)}{x^2 + x^4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x) \sin x}{(1 - \cos x)(e^x - 1)}.$$

FACOLTATIVO: Si calcoli l'altro limite.

ESERCIZIO 3. [10] Si studi il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x}{x^3 + 1}.$$

In particolare

1. si determini il dominio D_f della funzione,
2. si studi l'esistenza di eventuali asintoti orizzontali, obliqui o verticali,
3. si determinino gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo,
4. si discuta dove la funzione è crescente e dove è decrescente,
5. si discuta dove la funzione è convessa e dove è concava,
6. si disegni il grafico della funzione

Una volta completato il grafico si determini il codominio C_f della funzione.

ESERCIZIO 4. [5] Si discuta se i seguenti tre vettori sono linearmente indipendenti:

$$\vec{v}_1 = (1, 2, 3), \quad \vec{v}_2 = (3, 2, 1), \quad \vec{v}_3 = (1, 0, 2),$$

e si calcolino il prodotto scalare $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ e il prodotto vettoriale $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_3$.

ESERCIZIO 5. [6+1] Si calcolino gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

e si discuta l'invertibilità della matrice.

FACOLTATIVO: Si calcoli A^2 e se ne trovino autovalori e autovettori.

ESERCIZIO 6. [6] Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 6y}{x^2 + y^2 + 5}.$$

Si calcolino massimi e minimi di $f(x, y)$ nel dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.
