

Matematica I (CdL in Scienze Geologiche)

Anno Accademico 2023-2024

Prova scritta - Quarto appello (24-06-2024)

ESERCIZIO 1. [5+2] Si studi il dominio di due delle seguenti tre funzioni:

$$f(x) = \ln(1 - \sin(2x)), \quad g(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 - 1}}, \quad h(x) = \sqrt{(9 - x^2) \ln(x - 1)}.$$

FACOLTATIVO: Si studi il dominio dell'altra funzione.

ESERCIZIO 2. [6+2] Si calcolino due dei tre seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{(x + 1)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{\sin(\sin(x^2))}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - \sin x}{x \sin x}.$$

FACOLTATIVO: Si calcoli l'altro limite.

ESERCIZIO 3. [10+1] Si studi il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = x^4(x + 6)e^x.$$

In particolare

1. si determini il dominio D_f della funzione,
2. si studi l'esistenza di eventuali asintoti orizzontali, obliqui o verticali,
3. si determinino gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo,
4. si discuta dove la funzione è crescente e dove è decrescente,
5. si discuta dove la funzione è convessa e dove è concava,
6. si disegni il grafico della funzione

FACOLTATIVO: Una volta completato il grafico si determini il codominio C_f della funzione.

ESERCIZIO 4. [5+1] Si considerino i seguenti tre vettori:

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{v}_2 = (1, -1, 4), \quad \vec{v}_3 = (3, 5, 0).$$

1. Si verifichi che i vettori sono linearmente dipendenti, e si esprima \vec{v}_1 come combinazione lineare di \vec{v}_2 e \vec{v}_3 .
2. Si calcoli il prodotto vettoriale $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ e si usi il risultato per calcolare l'angolo tra i vettori \vec{v}_1 e \vec{v}_2 .

FACOLTATIVO: Si calcolino la norma del vettore \vec{v}_1 e il prodotto scalare $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$, e si ricavi da questo il prodotto scalare $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3$, senza calcolarlo esplicitamente.

ESERCIZIO 5. [5+2] Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si calcolino gli autovalori e gli autovettori di A e si dimostri che A è invertibile.

FACOLTATIVO: Si calcoli la matrice inversa A^{-1} , e se calcolino autovalori e autovettori.

ESERCIZIO 6. [5+2] Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x^3y + y.$$

1. Si calcolino massimi e minimi di $f(x, y)$ nel dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2, |y| \leq 1\}$.
2. Si calcoli la derivata direzionale di $f(x, y)$ in $(x, y) = (0, 0)$ nella direzione del vettore $\vec{u} = (1, 1)$.

FACOLTATIVO: Si discuta se la funzione ammette massimi e minimi assoluti in \mathbb{R}^2 .
