

Matematica I (CdL in Scienze Geologiche)

Anno Accademico 2023-2024

Prova scritta - Quinto appello (15-07-2024)

ESERCIZIO 1. [5+2] Si studi il dominio di due delle seguenti tre funzioni:

$$f(x) = \frac{1}{1 + \cos x}, \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}, \quad h(x) = \sqrt{(2-x) \ln x}.$$

FACOLTATIVO: Si studi il dominio dell'altra funzione.

ESERCIZIO 2. [6+2] Si calcolino due dei tre seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2-x} - 1 + \sin x}{x \sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 8}{x\sqrt{x^2 + 1}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{\ln(1+x^2)}.$$

FACOLTATIVO: Si calcoli l'altro limite.

ESERCIZIO 3. [10+1] Si studi il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x - 1}.$$

In particolare

1. si determini il dominio D_f della funzione,
2. si studi l'esistenza di eventuali asintoti orizzontali, obliqui o verticali,
3. si determinino gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo,
4. si discuta dove la funzione è crescente e dove è decrescente,
5. si discuta dove la funzione è convessa e dove è concava,
6. si disegni il grafico della funzione

FACOLTATIVO: Una volta completato il grafico si determini il codominio C_f della funzione.

ESERCIZIO 4. [5+1] Si considerino i seguenti tre vettori:

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{v}_2 = (2, 1, 1), \quad \vec{v}_3 = (0, 1, 1).$$

1. Si verifichi che i vettori sono linearmente dipendenti, e si esprima \vec{v}_1 come combinazione lineare di \vec{v}_2 e \vec{v}_3 .
2. Si calcoli il prodotto vettoriale $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ e si usi il risultato per calcolare l'angolo tra i vettori \vec{v}_1 e \vec{v}_2 .

FACOLTATIVO: Si calcolino la norma del vettore \vec{v}_1 e il prodotto scalare $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$, e si ricavi da questo il prodotto scalare $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3$, senza calcolarlo esplicitamente.

ESERCIZIO 5. [5+2] Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Si dimostri che A è invertibile.
2. Si calcolino gli autovalori e gli autovettori di A .

FACOLTATIVO: Si calcoli la matrice inversa A^{-1} , e se calcolino autovalori e autovettori.

ESERCIZIO 6. [5+2] Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x^2 y^2.$$

1. Si calcolino massimi e minimi di $f(x, y)$ nel dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2, |y| \leq 1\}$.
2. Si calcoli la derivata direzionale di $f(x, y)$ in $(x, y) = (0, 0)$ nella direzione del vettore $\vec{u} = (1, 1)$.

FACOLTATIVO: Si discuta se la funzione ammette massimi e minimi assoluti in \mathbb{R}^2 .
