

Matematica I (CdL in Scienze Geologiche)

Anno Accademico 2023-2024

Prima prova di esonero (07-11-2023)

ESERCIZIO 1. [5] Si considerino gli insiemi

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, y \leq 0\}.$$

Si determinino $A \cup B$ e $A \cap B$ e si disegnino i quattro insiemi.

ESERCIZIO 2. [5] Si considerino gli insiemi

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 2\}.$$

Si determinino $A \cup B$ e $A \cap B$ e si disegnino i quattro insiemi.

ESERCIZIO 3. [5] Si studi il dominio e il codominio delle seguenti due funzioni:

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}, \quad g(x) = \sqrt{x \ln x},$$

ESERCIZIO 4. [5] Si studi il dominio delle seguenti due funzioni:

$$f(x) = \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}, \quad g(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{x|x| - 2x + 1},$$

ESERCIZIO 5. [5] Si calcolino i due seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 1} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin 2x}{(x + x^2)(1 - \cos x)}.$$

ESERCIZIO 6. [5] Si studi la continuità, nel loro dominio di definizione, delle seguenti due funzioni:

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ e^x, & x < 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} |x|(x - 1), & x \geq 0, \\ x^{-1}(e^{x^2} - 1), & x < 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 7. [5] Si trovino, se esistono, i valori $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali le seguenti funzioni sono continue in $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{|x^2 - 4|}, & x \geq 0, \\ a, & x < 0. \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} b, & x \geq 0, \\ \frac{\sin^2(e^{x^2} - 1)}{1 - \cos(x^2)}, & x < 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 8. [5] Si considerino le funzioni

$$f(x) = \sqrt{1 - x}, \quad g(x) = \sin x, \quad h(x) = \frac{x + 1}{x - 1}.$$

Si determinino le funzioni che si ottengono come composizioni

$$f_1 = f \circ g \circ h, \quad f_2 = g \circ f \circ h,$$

e se ne studino i rispettivi domini.
