

Matematica I (CdL in Scienze Geologiche)
Anno Accademico 2023/2024

Seconda prova di esonero (11-01-2024)

ESERCIZIO 1. [10] Si studi il grafico della seguente funzione

$$f(x) = \frac{x^2(x^2 + 2)}{x^2 + 1}.$$

In particolare

1. si determini il dominio D_f della funzione,
2. si studi l'esistenza di eventuali asintoti orizzontali, obliqui o verticali,
3. si determinino gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo,
4. si discuta dove la funzione è crescente e dove è decrescente,
5. si discuta dove la funzione è convessa e dove è concava,
6. si disegni il grafico della funzione.

Una volta completato il grafico si determini il codominio C_f della funzione.

ESERCIZIO 2. [6+1] Si calcolino due dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \sin x}{x \sin(1 - \cos x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})^2 - 4 \sin^2 x}{e^{x^4} - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2 \sin(x - x^2)}{\tan(x^2)}.$$

FACOLTATIVO: Si calcoli anche l'altro limite.

ESERCIZIO 3. [5+1] Si calcolino gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

FACOLTATIVO: Si calcoli l'inversa di A .

ESERCIZIO 4. [5] Si considerino i vettori

$$\vec{u} = (2, -2, 1), \quad \vec{v} = (-1, 5, 2), \quad \vec{w} = (-3, 3, 3).$$

1. Si determini il coseno dell'angolo compreso tra \vec{v} e \vec{w} .
2. Si discuta se i vettori siano linearmente dipendenti e, in caso di risposta affermativa, si esprima uno dei tre come combinazione lineare degli altri due.
3. Si calcoli il prodotto vettoriale $\vec{u} \wedge \vec{w}$.

ESERCIZIO 5. [5] Si determini, se esiste,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{\sqrt{\sin(x^2 + y^2) + 1} - 1}.$$

ESERCIZIO 6. [6+1] Si consideri la funzione

$$f(x, y) = 2x^4 - 5y^4.$$

Si determinino i punti di massimo e di minimo di f nel dominio $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$.

FACOLTATIVO: Si calcoli la derivata direzionale nella direzione del vettore $\vec{v} = (1, 1)$ nel punto $P = (1, 2)$.