Analisi Matematica per le Applicazioni

CdL in Ingegneria Meccanica – Anno Accademico 2024/2025

Soluzioni della prova scritta del secondo appello (17-02-2025)

Esercizio 0.

(1) Integrando si trova

$$y(x) = \int \left(2x + x^2\right) \mathrm{d}x = x^2 + \frac{x^3}{3} + C,$$

dove C è una costante arbitraria.

---

(2) Si ha $0 \leq 1-x \leq 1 \Longrightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Longrightarrow 0 \leq x \leq 1$ e, per ogni $x \in (0,1)$, si ha $0 \leq y \leq 1-x$, da cui segue che

$$\iint_\Omega x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 x \,\mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y = \int_0^1 x\, y\Big|_0^{1-x} \mathrm{d}x = \int_0^1 x\,(1-x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \left(x - x^2\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

---

(3) Integrando per separazione di variabili si trova

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int x \,\mathrm{d}x \qquad \Longrightarrow \qquad \log|y| = \frac{x^2}{2} + C, \qquad (*)$$

dove $y = y(x)$ e la costante C è fissata dalla condizione iniziale: per $x = 1$ si ha $y(0) = -e$, così che $(*)$, calcolata in $x = 0$, dà

$$\log|-e| = \log e = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad 1 = \frac{1}{2} + C \qquad \Longrightarrow \qquad C = \frac{1}{2}.$$

Quindi, esponenziando $(*)$, si ottiene

$$|y| = e^{\frac{1}{2}(x^2+1)} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \pm e^{\frac{1}{2}(x^2+1)} \qquad \Longrightarrow \qquad y = -e^{\frac{1}{2}(x^2+1)},$$

dove l'ultima uguaglianza, che fissa il segno, si ottiene nuovamente imponendo la condizione iniziale.

---

(4) Il dominio D è il cerchio di raggio $\sqrt{2}$ e centro nell'origine. Per cercare i punti critici interni si pone uguale a 0 il gradiente di f: si trova

$$f_x = 2(x+1) = 0, \quad f_y = 2y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = -1,\ y = 0,$$

che identifica il punto $P_0 = (-1, 0)$ all'interno al dominio D. Sulla frontiera ∂D, dove y è tale che $x^2 + y^2 = 2$, e quindi $y = \pm\sqrt{2 - x^2}$, per ogni $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, la funzione $f(x, y)$ si può scrivere nella forma $f(x, \pm\sqrt{2 - x^2}) = g(x) = x^2 + (2 - x^2) + 2x = 2 + 2x$. Poiché $g'(x) = 2 > 0$, la funzione $g(x)$ è crescente e assume pertanto il valore minimo in $x = -\sqrt{2}$ e il valore massimo in $x = \sqrt{2}$; per entrambi i valori di x si ha $y = 0$. I punti di massimo e di minimo assoluto della funzione $f(x, y)$ vanno quindi cercati tra P_0, $P_1 = (-\sqrt{2}, 0)$ e $P_2 = (-\sqrt{2}, 0)$. Si ha

$$f(P_0) = -1, \quad f(P_1) = 2 - 2\sqrt{2} = 2(1 - \sqrt{2}), \quad f(P_2) = 2 + 2\sqrt{2} = 2(1 + \sqrt{2}).$$

In conclusione, il massimo di f vale $2 + 2\sqrt{2}$ ed è raggiunto in $P_2 = (\sqrt{2}, 0)$, mentre il minimo di f vale -1 ed è raggiunto in $P_0 = (-1, 0)$.

ESERCIZIO 1. Integrando per separazione di variabili si trova

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sin^2 y}\mathrm{d}y = \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x,$$

dove

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}y}{\sin^2 y}\mathrm{d}y = \int \frac{\mathrm{d}y}{\cos^2 y \left(\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}\right)}\mathrm{d}y = \int \frac{\mathrm{d}y}{\cos^2 y \, \mathrm{tg}^2 y}\mathrm{d}y,$$

così che, con la sostituzione $t = \mathrm{tg}\, y$ ($\Longrightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{d}y/\cos^2 y$) dà

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{t} + C_1 = -\frac{1}{\mathrm{tg}\, y} + C_1,$$

dove C_1 è una costante arbitraria, mentre, integrando per parti e ricordando che $(\sin x)' = \cos x$ e $(\cos x)' = -\sin x$ (qui e nel seguito $'$ indica la derivata rispetto a x), si ottiene

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \int \sin x \, \sin x \, \mathrm{d}x = \int \sin x \, (-\cos x)' \, \mathrm{d}x = -\sin x \cos x - \int \cos x (-\cos x) \, \mathrm{d}x \\
&= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \mathrm{d}x = -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, \mathrm{d}x \\
&= -\sin x \cos x + \int \mathrm{d}x - \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x \\
&= -\sin x \cos x + x - I_2 \quad \Longrightarrow \quad I_2 = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + C_2,
\end{aligned}$$

dove C_2 è di nuovo una costante arbitraria. In conclusione si ha

$$\frac{1}{\mathrm{tg}\, y} = \frac{\sin x \cos x - x}{2} + C,$$

dove la costante C si fissa imponendo la condizione iniziale $y(0) = \pi/4$. Si trova

$$\mathrm{tg}\, y = \mathrm{tg}\,(\pi/4) = 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 = 0 + C \quad \Longrightarrow \quad C = 1.$$

Ne segue che

$$\mathrm{tg}\, y = \frac{1}{\frac{\sin x \cos x - x}{2} + 1} \quad \Longrightarrow \quad y = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\frac{\sin x \cos x - x}{2} + 1} \right).$$

ESERCIZIO 2. Gli autovalori di A solo le radici del polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5),$$

quindi sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$. I corrispondenti autovettori $\boldsymbol{v}_1 = (v_{11}, v_{12})$ e $\boldsymbol{v}_2 = (v_{21}, v_{22})$ si trovano richiedendo che si abbia $A\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}$ e $(A - 5\mathbb{1})\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$, ovvero

$$\begin{aligned}
4v_{11} + 2v_{12} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad v_{22} = -2v_{11} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = (-1, 2), \\
-v_{21} + 2v_{22} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad v_{21} = 2v_{22} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = (2, 1).
\end{aligned}$$

Definendo

$$C = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

si trova

$$C^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui segue che

$$\begin{aligned} e^{Ax} &= C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{5x} \end{pmatrix} C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{5x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2e^{5x} & e^{5x} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1+4e^{5x} & -2+2e^{5x} \\ -2+2e^{5x} & 4+e^{5x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il sistema di equazioni si riscrive nella forma

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

e la soluzione è data da $\boldsymbol{y}(x) = e^{Ax}\boldsymbol{y}(0)$. Si ha quindi

$$y(x) = e^{Ax}y(0) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1+4e^{5x} & -2+2e^{5x} \\ -2+2e^{5x} & 4+e^{5x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1+6e^{5x} \\ 2+3e^{5x} \end{pmatrix}.$$

<u>Esercizio 3.</u> Le radici del polinomio caratteristico $\lambda^2 - 4\lambda + 8$ sono

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{4-8} = 2 \pm \sqrt{-4} = 2 \pm 2i \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 2+2i,\ \lambda_2 = 2-2i.$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è

$$y_0(x) = e^{2x}\left(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x\right),$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti arbitrarie. La soluzione particolare è data da $\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)$, dove $\tilde{y}_1(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' - 4y' + 8y = 8x$$

e $\tilde{y}_2(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' - 4y' + 8y = 2e^{2x} \sin x \cos x = e^{2x} \sin 2x,$$

dove si è usata l'identità trigonometrica $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, con $\alpha = \beta = x$.

Si cerca $\tilde{y}_1(x)$ nella forma $\tilde{y}_1(x) = Ax + B$. Tenuto conto che $\tilde{y}_1' = A$ e $\tilde{y}_1'' = 0$, si ottiene

$$-4A + 8Ax + 8B = 8x \quad \Longrightarrow \quad A = 1,\ B = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{y}_1(x) = x + \frac{1}{2}.$$

Poiché $\lambda_1 = 2+2i$, la soluzione particolare $\tilde{y}_2(x)$ si cerca nella forma

$$\tilde{y}_2(x) = x\,Q(x), \qquad Q(x) = e^{2x}\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right).$$

Tenuto conto che $\tilde{y}_2' = x\,Q' + Q$ e $\tilde{y}_2'' = 2Q' + x\,Q''$, si ottiene

$$2Q' + x\,Q'' - 4x\,Q' - 4Q + 8x\,Q = e^{2x}\sin 2x,$$

ovvero

$$x(Q'' - 4Q' + 8Q) + 2Q' - 4Q = 2Q' - 4Q = e^{2x}\sin 2x, \qquad (*)$$

dove si è usato il fatto che Q risolve l'equazione omogenea (e quindi $Q'' - 4Q' + 8Q = 0$).

Derivando Q, si trova

$$Q' = e^{2x}\left(2A\cos 2x + 2B\sin 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x\right),$$

che, introdotta nell'equazione $(*)$, implica

$$e^{2x}\left(4A\cos 2x + 4B\sin 2x - 4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4A\cos 2x - 4B\sin 2x\right) = e^{2x}\sin 2x.$$

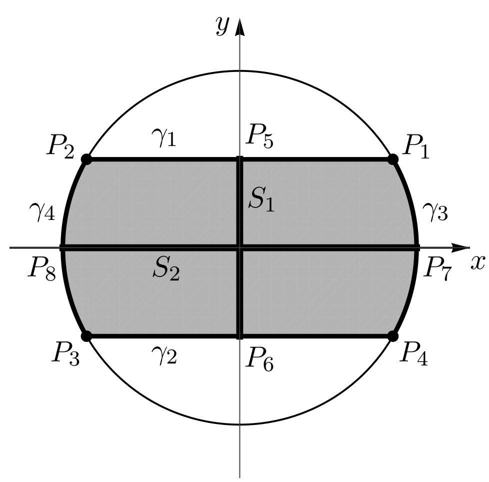
Semplificando, dividendo poi per l'esponenziale e^{2x} ed eguagliando infine i coefficienti delle funzioni $\sin 2x$ e $\cos 2x$, si trova

$$-4A = 1,\ 4B = 0 \quad\Longrightarrow\quad A = -\frac{1}{4},\ B = 0 \quad\Longrightarrow\quad \tilde{y}_2(x) = -\frac{x}{4}e^{2x}\cos 2x.$$

In conclusione la soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x) = e^{2x}\left(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x\right) + x + \frac{1}{2} - \frac{x}{4}e^{2x}\cos 2x.$$

<u>Esercizio 4.</u> Il dominio D della funzione è dato dall'intersezione del cerchio $\mathcal{C}$ di raggio 2 e centro nell'origine e la striscia orizzontale $\mathcal{S}$ di semiampiezza 1 intorno all'asse x (cfr. la figura).



Le derivate parziali della funzione $f(x,y)$ sono

$$f_x(x,y) = -\frac{2xy^2(1+y^2)}{1+x^2+y^2}, \qquad f_y(x,y) = -\frac{2yx^2(1+x^2)}{1+x^2+y^2}.$$

Si ha $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ se e solo se $x = 0$ oppure $y = 0$: il gradiente di f si annulla lungo l'asse x e lungo l'asse y. Sono perciò punti critici interni di f tutti i punti che si trovano sugli assi coordinati e sono all'interno sia del cerchio $\mathcal{C}$ che della striscia $\mathcal{S}$, ovvero tutti i punti della forma $(0, y)$, con $y \in (-1,1)$, e della forma $(x, 0)$, con $x \in (-2,2)$.

Se definiamo

$$P_1 = (\sqrt{3}, 1), \quad P_2 = (-\sqrt{3}, 1), \quad P_3 = (-\sqrt{3}, -1), \quad P_4 = (\sqrt{3}, -1),$$

la frontiera di D è costituita dai due segmenti γ_1 e γ_2 che connettono P_1 a P_2 e P_3 a P_4 e dai due archi di circonferenza γ_3 e γ_4 che connettono P_1 a P_4 e P_2 a P_3 attraversando l'asse x (cfr. di nuovo la figura). Si possono parametrizzare le quattro curve come segue:

$$\begin{aligned}
&\gamma_1(t) = (t, 1), \qquad t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}], \\
&\gamma_2(t) = (t, -1), \qquad t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}], \\
&\gamma_3(t) = (\sqrt{4 - t^2}, t), \qquad t \in [-1, 1], \\
&\gamma_4(t) = (-\sqrt{4 - t^2}, t), \qquad t \in [-1, 1].
\end{aligned}$$

Su γ_1, si ha

$$f(x, y) = f(t, 1) = g(t) = \frac{t^2}{2 + t^2} \quad \Longrightarrow \quad g'(t) = \frac{2t(2 + t^2) - 2t\, t^2}{(2 + t^2)^2} = \frac{4t}{(2 + t^2)^2},$$

quindi si ha $g'(t) = 0$ se e solo se $t = 0$; ne segue che $t = 0$ è un punto critico per $g(t)$. Inoltre $g'(t) > 0$ se e solo se $t > 0$; ne segue che $t = 0$ è un punto di minimo per $g(t)$. Poiché $y = 1$ lungo γ_1, a $t = 0$ corrisponde nel piano il punto $P_5 = (0, 1)$.

Dal momento che la funzione $f(x, y)$ è pari sia in x che in y, anche lungo γ_2 la funzione $f(t, -1) = g(t)$ ha un punto di minimo in $t = 0$, a cui corrisponde nel piano il punto $P_6 = (0, -1)$.

Lungo γ_3, si ha

$$f(x, y) = f(\sqrt{4 - t^2}, t) = h(t) = \frac{t^2(4 - t^2)}{1 + t^2 + (4 - t^2)} = \frac{4t^2 - t^4}{5},$$

da cui si ricava

$$h'(t) = \frac{1}{5}\left(8t - 4t^3\right) = \frac{1}{5} 4t \left(2 - t^2\right).$$

Si ha $h'(t)$ se e solo se $t = 0$ oppure $t = \pm\sqrt{2}$. Tuttavia solo $t = 0$ è all'interno dell'intervallo $(-1, 1)$, quindi la funzione $h(t)$ ammette un solo punto critico in $(-1, 1)$, dato da $t = 0$, a cui corrisponde nel piano il punto $P_7 = (2, 0)$

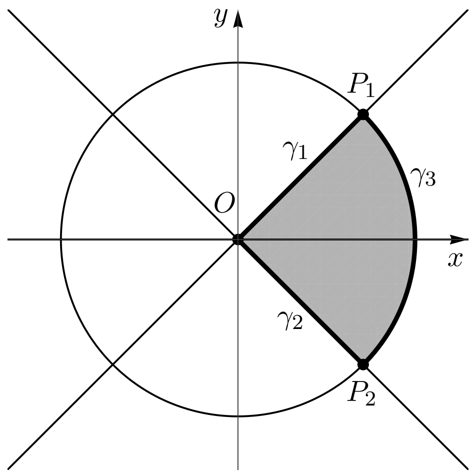
Di nuovo, per simmetria (considerata la parità della funzione $f(x, y)$, anche lungo la curva γ_4 la funzione $f(x, y) = f(-\sqrt{4 - t^2}, t)$ è data da $h(t)$, che ammette un solo punto critico interno, dato da $t = 0$, a cui corrisponde nel piano il punto $P_8 = (-2, 0)$.

I punti di massimo e di minimo vanno cercati tra i punti del segmento S_1 che connette i punti P_5 e P_6 (con i due estremi inclusi), tra i punti del segmento S_2 che connette i punti P_7 e P_8 (con i due estremi inclusi) e tra i vertici che costituiscono i punti di intersezione delle curve γ_1, γ_2, γ_3 e γ_4, ovvero P_1, P_2, P_3 e P_4. Si trova

$$f(P_1) = f(P_2) = f(P_3) = f(P_4) = \frac{3}{5}, \qquad f(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in S_1 \cup S_2.$$

In conclusione tutti i punti lungo i segmenti S_1 e S_2 sono punti di minimo assoluto (e il minimo di f è 0), mentre sono punti di massimo assoluto di f i quattro vertici P_1, P_2, P_3 e P_4 (e il massimo di f è $3/5$).

Esercizio 5. L'insieme Ω si ottiene richiedendo: (1) $y \leq x$ se $y \geq 0$, (2) $-y \leq x$, ovvero $y \geq -x$, se $y < 0$. Quindi $(x, y) \in \Omega$ se il punto di coordinate (x, y) si trova al di sotto della bisettrice $y = x$ nel semipiano superiore ($y \geq 0$) e al di sopra della bisettrice $y = -x$ nel semipiano inferiore ($y < 0$). In conclusione, Ω è l'insieme limitato la cui frontiera $\partial\Omega$ è costituito dall'arco di circonferenza γ_3 nel semipiano $x \geq 0$ che unisce i punti $P_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $P_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ e dai due segmenti γ_1 e γ_2 che connettono all'origine O i due punti P_1 e P_2, rispettivamente (cfr. la figura).



In coordinate polari, scrivendo $x = \rho\cos\varphi$ e $y = \rho\sin\varphi$, l'insieme Ω è dato da

$$\Omega = \{(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] : \rho \leq 1,\ \varphi \in [-\pi/4, \pi/4]\}.$$

Si ha

$$I = \int_\Omega xy^2 e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\rho \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \mathrm{d}\varphi\,\rho^3 e^\rho \cos\varphi\sin^2\varphi,$$

dove ρ è il determinante dello jacobiano della trasformazione che fa passare dalle coordinate cartesiane alle coordinate polari. I due integrali in ρ e in φ fattorizzano:

$$I = I_1 I_2, \qquad I_1 = \int_0^1 \mathrm{d}\rho\,\rho^4 e^\rho, \quad I_2 = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \mathrm{d}\varphi\,\cos\varphi\sin^2\varphi.$$

Il secondo integrale si calcola tramite la sostituzione $t = \sin\varphi$ ($\Longrightarrow \mathrm{d}t = \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$), così si ha

$$\int \mathrm{d}\varphi\,\cos\varphi\sin^2\varphi = \int \mathrm{d}t\,t^2 = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3\varphi}{3} + C,$$

dove C è una costante arbitraria, da cui segue che

$$I_2 = \left.\frac{\sin^3\varphi}{3}\right|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Riguardo al primo integrale tenendo conto delle derivate

$$(e^\rho)' = e^\rho, \quad (\rho^4)' = 4\rho^3, \quad (\rho^3)' = 3\rho^2, \quad (\rho^2)' = 2\rho, \quad \rho' = 1,$$

si integra per parti ripetutamente, in modo da ottenere l'integrale indefinito

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\rho\,\rho^4 e^\rho &= \rho^4 e^\rho - 4\int \mathrm{d}\rho\,\rho^3 e^\rho = \rho^4 e^\rho - 4\left(\rho^3 e^\rho - 3\int \mathrm{d}\rho\,\rho^2 e^\rho\right)\\ &= \rho^4 e^\rho - 4\rho^3 e^\rho + 12\int \mathrm{d}\rho\,\rho^2 e^\rho = \rho^4 e^\rho - 4\rho^3 e^\rho + 12\rho^2 e^\rho - 24\int \mathrm{d}\rho\,\rho e^\rho\\ &= \rho^4 e^\rho - 4\rho^3 e^\rho + 12\rho^2 e^\rho - 24\rho e^\rho + 24\int \mathrm{d}\rho\, e^\rho\\ &= \rho^4 e^\rho - 4\rho^3 e^\rho + 12\rho^2 e^\rho - 24\rho e^\rho + 24 e^\rho + C,\end{aligned}$$

dove C è una costante arbitraria, da cui segue che

$$I_1 = \rho^4 e^\rho - 4\rho^3 e^\rho + 12\rho^2 e^\rho - 24\rho e^\rho + 24 e^\rho \Big|_0^1 = 9e - 24.$$

In conclusione si ha

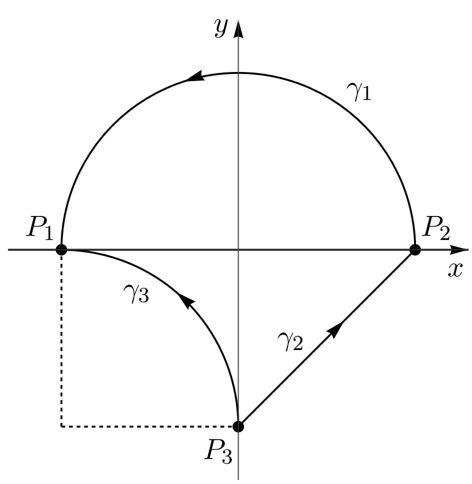
$$I = \frac{1}{3\sqrt{2}}\,(9e-24) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(3e-8)\,.$$

<u>Esercizio 6.</u> Si può decomporre l'integrale di prima specie nella somma di tre integrali:

$$I = \int_\gamma x^2 y\,\mathrm{d}s = I_1 + I_2 + I_3, \quad I_1 = \int_{\gamma_1} x^2 y\,\mathrm{d}s, \quad I_2 = \int_{\gamma_2} x^2 y\,\mathrm{d}s, \quad I_3 = \int_{\gamma_3} x^2 y\,\mathrm{d}s,$$

dove (cfr. la figura)

$$\begin{aligned}&\gamma_1(t) = (2\cos t, 2\sin t), \quad t\in[0,\pi],\\ &\gamma_2(t) = (t, t-2), \quad t\in[0,2],\\ &\gamma_3(t) = (-2+2\cos t, -2+2\sin t), \quad t\in[0,\pi/2].\end{aligned}$$



Si noti che l'orientamento delle curve è quello fissato dalla parametrizzazione ma è irrilevante ai fini del calcolo dell'integrale. Tenuto conto che

$$\begin{aligned}&\gamma_1'(t) = (-2\sin t, 2\cos t) \quad\Longrightarrow\quad \|\gamma_1'(t)\| = \sqrt{4\sin^2(t)+4\cos^2(t)} = 2,\\ &\gamma_2'(t) = (1,1) \quad\Longrightarrow\quad \|\gamma_2'(t)\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},\\ &\gamma_3'(t) = (-2\sin t, 2\cos t) \quad\Longrightarrow\quad \|\gamma_1'(t)\| = \sqrt{4\sin^2(t)+4\cos^2(t)} = 2,\end{aligned}$$

si ottiene

$$I_1 = \int_0^\pi \mathrm{d}t\,(4\cos^2 t)(2\sin t)2 = 16\int_0^\pi \mathrm{d}t\ \cos^2 t\sin t = 16\left(-\frac{\cos^3}{3}\right)\bigg|_0^\pi = 16\frac{2}{3} = \frac{32}{3},$$

dove si è effettuata la sostituzione $x = \cos t$ per calcolare l'integrale,

$$I_2 = \int_0^2 \mathrm{d}t\,t^2(t-2)\sqrt{2} = \sqrt{2}\left(\frac{t^4}{4} - \frac{2t^3}{3}\right)\bigg|_0^2 = \sqrt{2}\left(\frac{16}{4} - \frac{16}{3}\right) = -\sqrt{2}\frac{16}{12} = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

e, infine,

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t\,\big(4 + 4\cos^2 t - 8\cos t\big)\,(-2 + 2\sin t)\,2 \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t\,\big(-8 + 8\sin t - 8\cos^2 t + 8\cos^2 t\sin t + 16\cos t - 16\sin t\cos t\big) \\
&= -16\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t + 16\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t\ \sin t - 16\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t\ \cos^2 t + 16\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t\ \cos^2 t\sin t \\
&\quad + 32\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t\ \cos t - 32\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t\ \sin t\cos t,
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}t = t, \\
&\int \mathrm{d}t\ \sin t = -\cos t, \\
&\int \mathrm{d}t\ \cos^2 t = \int \mathrm{d}t\ \cos t(\sin t)' = \sin t\ \cos t + \int \mathrm{d}t\ \sin^2 t \\
&\qquad = \sin t\ \cos t + \int \mathrm{d}t\,(1 - \cos^2 t) = \sin t\cos t + t - \int \mathrm{d}t\ \cos^2 t, \\
&\qquad \Longrightarrow \int \mathrm{d}t\ \cos^2 t = \frac{t + \sin t\cos t}{2}, \\
&\int \mathrm{d}t\ \cos^2 t\sin t = \int \mathrm{d}t\left(-\frac{\cos^3 t}{3}\right)' = -\frac{\cos^2 t}{3}, \qquad [\text{sostituzione } u = \cos t\ (\Longrightarrow \mathrm{d}u = -\sin t\,\mathrm{d}t)] \\
&\int \mathrm{d}t\ \cos t = \sin t, \\
&\int \mathrm{d}t\ \sin t\cos t = \int \mathrm{d}t\left(\frac{\sin^2 t}{2}\right)' = \frac{\sin^2 t}{2}, \qquad [\text{sostituzione } u = \sin t\ (\Longrightarrow \mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t)]
\end{aligned}$$

così che

$$\begin{aligned}
I_3 &= -16t - 16\cos t - 8t - 8\sin t\cos t - \frac{16}{3}\cos^3 t + 32\sin t - 16\sin^2 t\bigg|_0^{\pi/2} \\
&= \Big(-8\pi + 0 - 4\pi + 0 + 0 + 32 - 16\Big) - \Big(0 - 16 + 0 + 0 - \frac{16}{3} + 0 + 0\Big) \\
&= \Big(-12\pi + 16\Big) - \Big(-\frac{64}{3}\Big) = -12\pi + \frac{112}{3}.
\end{aligned}$$

In conclusione si ha

$$I = \frac{32}{3} - \frac{1}{6\sqrt{2}} - 12\pi + \frac{112}{3} = \frac{144}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - 12\pi.$$