Analisi Matematica per le Applicazioni
CdL in Ingegneria Meccanica – Anno Accademico 2024/2025

Soluzioni della prova scritta del quarto appello (17-06-2025)

Esercizio 0.

(1) Integrando una volta si trova, effettuando la sostituzione $x^2+1=u$ così che $2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$,

$$y'(x) = \int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2}\log|u| + C_1 = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C_1,$$

dove C_1 è una costante arbitraria e si è tenuto conto che $x^2+1>0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ per eliminare il modulo. Integrando una seconda volta, si trova

$$y(x) = \frac{1}{2}\int \log(x^2+1)\mathrm{d}x + C_1 x,$$

e, nel primo integrale, applicando la formula per parti

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

con $f(x) = \log(x^2+1)$ e $g'(x) = x$ (e quindi $g(x) = x$), si ha

$$\begin{aligned}\int \log(x^2+1)\mathrm{d}x &= x\log(x^2+1) - \int x\,\frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x \\ &= x\log(x^2+1) - 2\int \frac{x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

dove

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = x - \arctan x + C_2,$$

dove C_2 è un'altra costante arbitraria. In conclusione si ha

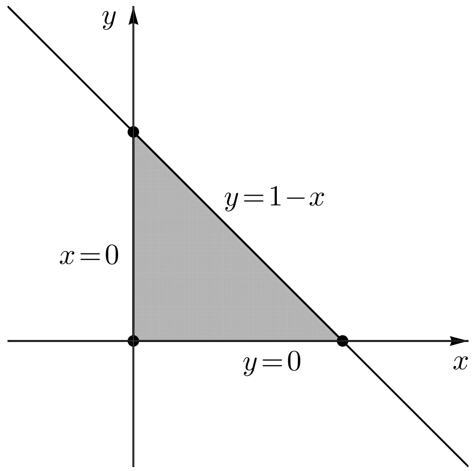
$$y(x) = \frac{1}{2}x\log(x^2+1) - x + \arctan x + C_2 + C_1 x.$$

---

(2) L'insieme Ω si ottiene imponendo le due condizioni

$$0 \le y \le 1-x, \qquad\qquad 0 \le 1-x \le 1.$$

La seconda condizione fissa $0 \le x \le 1$, e per ogni $x \in [0,1]$ la prima condizione fissa $0 \le y \le 1-x$. Quindi x si trova nell'intervallo $[0,1]$ dell'asse orizzontale e, per ciascun valore di x in tale intervallo, y è al di sopra della retta $y=0$ e al di sotto della retta $y = 1-x$ (cfr. la figura).



L'integrale è

$$\iint_\Omega x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 (1-x)^2\,\mathrm{d}x \int_0^{1-x} y\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (1-x)^2\,\mathrm{d}x\,\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{1-x}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^4\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_1^0 u^4\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^1 u^4\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left.\frac{u^5}{5}\right|_0^1 = \frac{1}{10},$$

dove si è effettuata la sostituzione $u = 1 - x$ (così che $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$ e gli estremi di integrazione in termini di u diventano $u = 0$ (quando $x = 1$) e $u = 1$ (quando $x = 0$).

---

(3) Integrando per separazione di variabili si trova

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + C, \qquad (*)$$

dove $y = y(x)$ e la costante C è fissata dalla condizione iniziale: per $x = 1$ si ha $y(0) = -1$, così che $(*)$, calcolata in $x = 0$, dà

$$1 = -1 + C \quad \Longrightarrow \quad C = 2.$$

Quindi, da $(*)$ si ottiene

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + 2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{x} - 2 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{\frac{1}{x} - 2} \quad y = \frac{x}{1-2x}.$$

---

(4) La funzione

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

è una funzione razionale ed è quindi continua in ogni punto (x, y) in cui il denominatore $x + y$ non si annulla. Se $x + y = 0$, ovvero lungo la retta $y = -x$, il denominatore si annulla e la funzione non è definita. Né si può estendere la funzione per continuità. Infatti, in generale, il limite

$$\lim_{x+y\to 0} f(x,y)$$

non solo non è finito, ma nemmeno esiste poiché non è univocamente definito: fissato un qualsiasi punto $(x_0, -x_0) \in D$ lungo la retta, con $x_0 \neq 0$, si trova

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,-x_0)} f(x,y) = (x_0 - (-x_0)) \lim_{(x,y)\to(x_0,-x_0)} \frac{1}{x+y} = 2x_0 \lim_{(x,y)\to(x_0,-x_0)} \frac{1}{x+y},$$

dove l'ultimo limite vale $\pm\infty$ a seconda che $x + y \to 0^+$ o $x + y \to 0^-$. Anche per $x_0 = 0$ il limite non esiste poiché

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

dipende dalla direzione lungo cui ci si avvicina all'origine (per esempio, vale 1 se ci si muove lungo l'asse $y = 0$ e vale -1 se ci si muove lungo l'asse $x = 0$).

<u>Esercizio 1.</u> Riscrivendo l'equazione nella forma

$$y' = \frac{x^3 + y^3}{xy^2} = \frac{x^3}{xy^2} + \frac{y^3}{xy^2} = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x} = a(x)y + b(x)y^n,$$

si vede che si tratta di un'equazione di Bernouilli con $a(x) = 1/x$, $b(x) = x^2$ e $n = -2$. Quindi, se si definisce $u = y^{1-n} = y^3$, si trova

$$u' = 3y^2y' = 3y^2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x}\right) = 3x^2 + \frac{3}{x}y^3 = \frac{3}{x}u + 3x^2. \qquad (*)$$

Quindi, posto

$$A(x) = \int a(x)\mathrm{d}x = 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = 3\log|x| = \log|x|^3 \quad \Longrightarrow \quad e^{A(x)} = |x|^3 = x^3,$$

dove si è eliminato il modulo in considerazione della condizione iniziale (data per $x = 1 > 0$), la soluzione di $(*)$ è

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{A(x)}\left(u(0) + \int_1^x e^{-A(x)}b(x)\mathrm{d}x\right) = x^3\left(u(0) + 3\int_1^x \frac{(x')^2}{(x')^3}\mathrm{d}x'\right) \\ &= x^3\left(u(0) + 3\int_1^x \frac{\mathrm{d}x'}{x'}\right) = x^3\left(u(0) + 3\log|x|\right), \end{aligned}$$

dove $u(0) = y^3(0) = 1$. In conclusione, tenuto condo di nuovo della condizione iniziale,

$$u(x) = x^3\left(1 + 3\log x\right) \quad \Longrightarrow \quad y(x) = x\left(1 + 3\log x\right)^{\frac{1}{3}}.$$

[*Equivalentemente, scrivendo* $y(x) = xz(x)$*, si ottiene*

$$xz' + z = y' = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x} = z^{-2} + z \quad \Longrightarrow \quad xz' = z^{-2}$$

che si integra per separazione di variabili:

$$\int z^2\mathrm{d}z = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{z^3}{3} = \log|x| + C,$$

dove C è una costante arbitraria. Imponendo le condizioni iniziali, tenedo conto che $z(1) = y(1)/1 = 1$, si può eliminare il modulo (poiché l'istante iniziale è $x = 1$) e si trova

$$\frac{1}{3} = \log 1 = C \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad z(x) = (3\log x + 1)^{\frac{1}{3}},$$

ovvero $y(x) = xz(x) = x\,(3\log x + 1)^{\frac{1}{3}}$.]

<u>Esercizio 2.</u> Gli autovalori di A solo le radici del polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = (5-\lambda)(3-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2,$$

quindi sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$. La matrice A non è quindi diagonalizzabile (se lo fosse dovrebbe essere proporzionale all'identità). Quindi A si scrive nella forma $A = 4\mathbb{1} + N$, dove N è una matrice nilpotente: si verifica facilmente che

$$N = A - 4\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & -1+1 \\ 1-1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

dove 0 è la matrice nulla. Ne segue che

$$e^{Ax} = e^{4\mathbb{1}x + Nx} = e^{4\mathbb{1}x}e^{Nx} = e^{4x}\mathbb{1}\,(\mathbb{1} + Nx) = e^{4x}\begin{pmatrix} 1+x & -x \\ x & 1-x \end{pmatrix}.$$

Il sistema di equazioni si riscrive nella forma

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

e la soluzione è data da $\boldsymbol{y}(x) = e^{Ax}\boldsymbol{y}(0)$. Si ha quindi

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{Ax}\boldsymbol{y}(0) = e^{4x}\begin{pmatrix} 1+x & -x \\ x & 1-x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{4x}\begin{pmatrix} 1+x-2x \\ x+2-2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4x}(1-x) \\ e^{4x}(2-x) \end{pmatrix}.$$

<u>Esercizio 3.</u> Le radici del polinomio caratteristico $\lambda^2 + 2\lambda + 1$ sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è

$$y_0(x) = (c_1 + c_2 x)\,e^{-x},$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti arbitrarie.

La soluzione particolare è data da $\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)$, dove $\tilde{y}_1(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' + 2y' + y = x^3$$

e $\tilde{y}_2(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' + 2y' + y = x^3 e^{-x}.$$

Si cerca $\tilde{y}_1(x)$ nella forma $\tilde{y}_1(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Tenuto conto che $\tilde{y}_1' = 3Ax^2 + 2Bx + C$ e $\tilde{y}_1'' = 6Ax + 2B$, si ottiene

$$(6Ax + 2B) + 2(3Ax^2 + 2Bx + C) + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = x^3,$$

ovvvero

$$Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B + C)x + (2B + 2C + D) = x^3,$$

da cui si ricava

$$A = 1, \quad B = -6, \quad C = 18, \quad D = -24 \quad \Longrightarrow \quad \tilde{y}_1(x) = x^3 - 6x^2 + 18x - 24.$$

Poiché $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ ha molteplicità 2, la soluzione particolare $\tilde{y}_2(x)$ si cerca nella forma

$$\tilde{y}_2(x) = x^2 \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) e^{-x} = Q(x)e^{-x},$$

dove si è definito

$$Q(x) = x^2 \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2.$$

Tenuto conto che $\tilde{y}_2' = e^{-x}(Q' - Q)$ e $\tilde{y}_2'' = e^{-x}(Q'' - 2Q' + Q)$, si ottiene

$$\left((Q'' - 2Q' + Q) + 2(Q' - Q) + Q\right) e^{-x} = x^3 e^{-x},$$

ovvero

$$Q'' - 2Q' + Q + 2Q' - 2Q + Q = x^3,$$

da cui si deduce che

$$Q'' = 20x^3 + 12Bx^2 + 6Cx + 2D = x^3 \implies A = \frac{1}{20}, \quad B = C = D = 0 \implies \tilde{y}_2(x) = \frac{x^5}{20} e^{-x}.$$

In conclusione la soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x) = (c_1 + c_2 x)\, e^{-x} + x^3 - 6x^2 + 18x - 24 + \frac{x^5}{20} e^{-x}.$$

<u>Esercizio 4.</u> Il dominio D di $f(x, y)$ è dato dai punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \leq 1$, ovvero

$$x^{\frac{4}{3}} \leq 1, \qquad y^{\frac{4}{3}} \leq 1 - x^{\frac{4}{3}}.$$

La prima condizione, tenendo conto che $x^{\frac{4}{3}} = (x^{\frac{1}{3}})^4 = |x^{\frac{1}{3}}|^4$, fissa

$$|x^{\frac{1}{3}}| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad |x| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Per analizzare la seconda condizione, che possiamo riscrivere, tenendo conto che $y^{\frac{4}{3}} = |y|^{\frac{4}{3}}$,

$$-\left(1 - x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \leq y \leq \left(1 - x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}},$$

dobbiamo quindi studiare le funzioni

$$F(x) = \left(1 - x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}, \qquad G(x) = -\left(1 - x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}, \qquad x \in [-1, 1]$$

e richiedere che si abbia $G(x) \leq y \leq F(x)$ per $x \in [-1, 1]$. Poiché $G(x) = -F(x)$ e $F(x)$ è pari possiamo limitarci a studiare $F(x)$ per $x \in [0, 1]$.

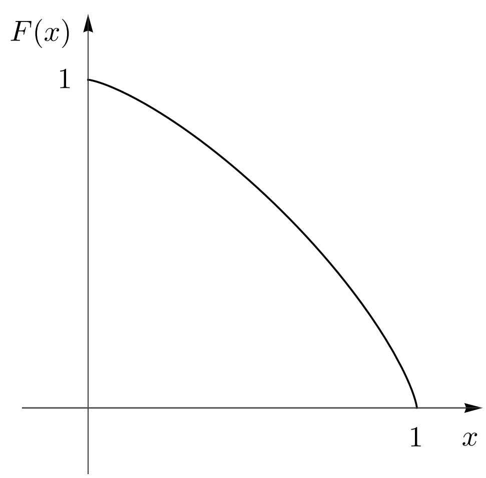
Si ha $F(0) = 1$ e $F(1) = 0$. Inoltre

$$F'(x) = -\frac{3}{4}\left(1 - x^{\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{4}} \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} = -x^{\frac{1}{3}}\left(1 - x^{\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{4}},$$

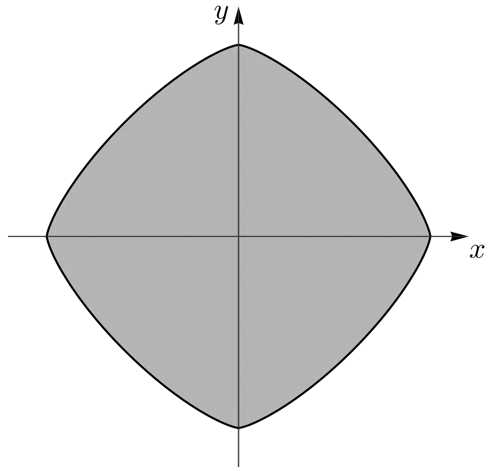
così che $F'(x) < 0$ per $x \in (0, 1)$. Inoltre

$$\lim_{x \to 0^+} F'(x) = 0, \qquad \lim_{x \to 1^-} F'(x) = -\infty.$$

Il grafico di $F(x)$, per $x \in [0, 1]$, è rappresentato nella seguente figura.



Possiamo quindi ricavare dal grafico di $F(x)$ il dominio D, tenendo conto che, come già notato, la funzione $f(x, y)$ è pari in x e in y, separatamente. Si ottiene l'insieme nella figura seguente.



Le derivate parziali della funzione $f(x,y)$ sono

$$f_x(x,y) = -4x^{\frac{1}{3}}\left(1-x^{\frac{4}{3}}\right)^2\left(1-y^{\frac{4}{3}}\right)^3, \qquad f_y(x,y) = -4y^{\frac{1}{3}}\left(1-y^{\frac{4}{3}}\right)^2\left(1-x^{\frac{4}{3}}\right)^3,$$

quindi si ha, all'interno di D,

$$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$$

se e solo se $x = y = 0$, dal momento che si può avere $x = 1$ oppure $y = 1$ solo sulla frontiera. Esiste quindi un solo punto critico interno, dato da $P_0 = (0,0)$.

Per studiare la funzione sulla frontiera, data la parità di $f(x,y)$, è sufficiente considerare solo il tratto della frontiera nel primo quadrante, che si può parametrizzare nella forma $y = F(x)$, per $x \in [0,1]$.

Si ha in tal caso

$$g(x) = f(x, F(x)) = \left(1-x^{\frac{4}{3}}\right)^3\left(1-1+x^{\frac{4}{3}}\right)^3 = x^4\left(1-x^{\frac{4}{3}}\right)^3, \qquad x \in [0,1].$$

La derivata di $g(x)$ è

$$\begin{aligned} g'(x) &= 4x^3\left(1-x^{\frac{4}{3}}\right)^3 + x^4 3\left(1-x^{\frac{4}{3}}\right)^2\left(-\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}\right) \\ &= x^3\left(1-x^{\frac{4}{3}}\right)^2\left(4(1-x^{\frac{4}{3}}) - 4x\,x^{\frac{1}{3}}\right) = x^3\left(1-x^{\frac{4}{3}}\right)^2\left(4-8x^{\frac{4}{3}}\right), \end{aligned}$$

così che, per $x \in (0,1)$, si ha $g'(x) = 0$ se e solo se

$$8x^{\frac{4}{3}} = 4 \quad \Longrightarrow \quad x^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = x_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

In conclusione, tenendo conto ancora una volta della parità della funzione, i punti di minimo e di massimo di $f(x,y)$ vanno cercati tra i punti

$$\begin{aligned} &P_0 = (0,0) \\ &P_1 = (x_0, F(x_0)), \quad P_2 = (x_0, -F(x_0)), \quad P_3 = (-x_0, F(x_0)), \quad P_4 = (-x_0, -F(x_0)), \\ &P_5 = (1,0), \quad P_6 = (0,1), \quad P_7 = (-1,0), \quad P_8 = (0,-1). \end{aligned}$$

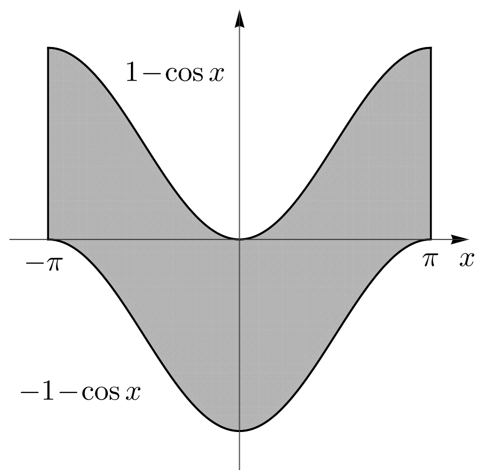
Si ha

$$
\begin{aligned}
f(0,0) &= 1,\\
f(x_0,F(x_0)) = f(x_0,-F(x_0)) = f(-x_0,F(x_0)) = f(-x_0,-F(x_0)) &= \left(\frac{1}{2}\right)^6,\\
f(1,0) = f(0,1) = f(-1,0) = f(0,-1) &= 0.
\end{aligned}
$$

In conclusione $P_0 = (0,0)$, dove la funzione assume il valore 1, è il punto di massimo, mentre P_5, P_6, P_7 e P_8 dove la funzione si annulla, sono punti di minimo.

<u>Esercizio 5.</u> L'insieme Ω si ottiene richiedendo (cfr. la figura)

$$-1 \le y + \cos x \le 1 \quad \Longrightarrow \quad -1 - \cos x \le y \le 1 - \cos x$$



Si ha

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega y\,(1-\cos x)\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos x)\,\mathrm{d}x \int_{-1-\cos x}^{1-\cos x} y\,\mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos x)\,\mathrm{d}x\; \frac{y^2}{2}\bigg|_{-1-\cos x}^{1-\cos x}\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos x)\left((1-\cos x)^2 - (-1-\cos x)^2\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos x)\left(1+\cos^2 x - 2\cos x - 1 - \cos^2 x - 2\cos x\right)\mathrm{d}x\\
&= -2\int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos x)\cos x\mathrm{d}x = -2\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\mathrm{d}x + 2\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

dove

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\mathrm{d}x = 0$$

poiché $\cos x$ è una funzione periodica di periodo 2π, mentre, integrando per parti,

$$
\begin{aligned}
\int \cos^2 x\mathrm{d}x &= \int \cos x\ \cos x\mathrm{d}x = \sin x\cos x + \int \sin x \sin x\,\mathrm{d}x\\
&= \sin x\cos x + \int (1-cos^2 x)\,\mathrm{d}x = \sin x\cos x + x - \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

ovvero

$$\int \cos^2 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2} (\sin x \cos x + x)$$

da ci segue che

$$2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \mathrm{d}x = (\sin x \cos x + x) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi.$$

In conclusione si trova

$$\int_\Omega y (1 - \cos x) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 2\pi.$$

<u>Esercizio 6.</u> Scrivendo la forma differenziale ω nella forma

$$\omega = f(x,y) \, \mathrm{d}x + g(x,y) \, \mathrm{d}y,$$

con

$$f(x,y) = e^x(1 + x + y), \qquad g(x,y) = e^x,$$

si ha che

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} g(x,y) = e^x,$$

quindi ω è una forma differenziale chiusa. Dal momento che la forma diferenziale è definita in $\mathbb{R}^2$, che è un insieme semplicemente connesso, la forma differenziale ω è anche esatta.

Scrivendo

$$f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} U(x,y), \qquad g(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} U(x,y),$$

integrando la prima equazione si ottiene

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int e^x(1 + x + y) \, \mathrm{d}x = (1 + y) \int e^x \, \mathrm{d}x + \int x \, e^x \, \mathrm{d}x \\ &= (1 + y)e^x + e^x \, (x - 1) + c_1(y) = (x + y)e^x + c_1(y), \end{aligned}$$

dove la funzione $c_1(y)$ dipende solo da y, mentre, integrando la seconda equazione, si ottiene

$$U(x,y) = \int e^x \, \mathrm{d}y = \int e^x \, \mathrm{d}y = ye^x + c_2(x),$$

dove la funzione $c_2(x)$ dipende solo da x. Scegliendo allora $c_2(x) = xe^x$ e $c_1(y) = 0$, si trova

$$U(x,y) = (x + y)e^x.$$

La curva γ connette i due punti $P_1 = (-2, f(-2)) = (-2,-2)$ e $P_2 = (2, f(2)) = (2,2)$. Si ha quindi

$$I = \int_\gamma \omega = U(2,2) - U(-2,-2) = (2 + 2)e^2 - (-2 - 2)e^{-2} = 4 \left(e^2 + e^{-2}\right).$$

La curva γ' connette gli stessi due punti P_1 e P_2. Quindi, poiché ω è esatta, si ha

$$\int_{\gamma'} \omega = \int_\gamma \omega = 4 \left(e^2 + e^{-2}\right).$$

D'altra parte, parametrizzando γ' nella forma $\gamma'(t) = (t,t)$, con $t \in [-2,2]$, si ha

$$\int_{\gamma'} \omega' = \int_{-2}^{2} t \left(e^{t^2} + t^{10}\right) \mathrm{d}t = 0,$$

poiché si tratta dell'integrale di una funzione dispari su un intervallo simmetrico. In conclusione, dal momento che l'integrale di ω' è nullo e la forma integrale ω è esatta, si ha

$$\int_{\gamma'} (\omega + \omega') = \int_{\gamma} \omega = 4\left(e^2 + e^{-2}\right).$$

[*Alternativamente, parametrizzando la curva* $\gamma = (t, t^3 - 3t)$, *così che* $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ *e* $\mathrm{d}y = (3t^2 - 3)\mathrm{d}t$, *si trova*

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{-2}^{2} \left(e^t (1 + t + t^3 - 3t)\mathrm{d}t + e^t \left(3t^2 - 3\right)\right) \mathrm{d}t = \int_{-2}^{2} e^t \left(t^3 + 3t^2 - 2t - 2\right) \mathrm{d}t,$$

dove

$$\int t^3 e^t \mathrm{d}t = t^3 e^t - 3\int t^2 e^t \mathrm{d}t, \quad \int t^2 e^t \mathrm{d}t = t^2 e^t - 2\int t\, e^t \mathrm{d}t, \quad \int t\, e^t \mathrm{d}t = t\, e^t - \int e^t \mathrm{d}t, \quad \int e^t \mathrm{d}t = e^t,$$

così che

$$\int e^t \left(t^3 + 3t^2 - 2t - 2\right) \mathrm{d}t = t^3 e^t + \int e^t \left(-2t - 2\right) \mathrm{d}t = t^3 e^t - 2te^t,$$

e quindi

$$\int_{-2}^{2} e^t \left(t^3 + 3t^2 - 2t - 2\right) \mathrm{d}t = e^2 (8 - 4) - e^{-2} (-8 + 4) = 4\left(e^2 + e^{-2}\right).$$

Analogamente, parametrizzando $\gamma' = (t,t)$, *così che* $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = \mathrm{d}t$, *si trova*

$$\int_{\gamma}' \omega = \int_{-2}^{2} e^t (1 + 2t)\mathrm{d}t + e^t \mathrm{d}t = 2\int_{-2}^{2} e^t (t + 1)\, \mathrm{d}t = 2te^t \Big|_{-2}^{2} = 4\left(e^2 + e^{-2}\right).$$

che coincide con il valore del primo integrale essendo ω *una forma differenziale esatta.*]