
ESERCIZIO 0. [4*]

1. Si determini la soluzione generale dell'equazione differenziale del secondo ordine $y'' = \frac{x}{x^2 + 1}$.
 2. Si consideri l'insieme $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - x \leq 1\}$. Si disegni l'insieme Ω e si calcoli l'integrale doppio $\iint_{\Omega} y(1-x)^2 dx dy$.
 3. Si risolva il problema di Cauchy $\begin{cases} x^2 y' = y^2, \\ y(1) = -1. \end{cases}$
 4. Si discuta la continuità della funzione $\frac{x-y}{x+y}$ nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
-

ESERCIZIO 1. [6] Si determini la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}, \\ y(1) = 1. \end{cases}$

ESERCIZIO 2. [6] Si calcoli l'esponenziale della matrice At , dove $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $t \in \mathbb{R}$, e si utilizzi il risultato per calcolare la soluzione del sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2, \\ y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 2. \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. [6] Si determini la soluzione generale dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + y = x^3(1 + e^{-x})$.

ESERCIZIO 4. [6] Si determinino massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = (1 - x^{\frac{4}{3}})^3 (1 - y^{\frac{4}{3}})^3$$

nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \leq 1\}$.

ESERCIZIO 5. [6] Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_{\Omega} y(1 - \cos x) dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y + \cos x| \leq 1, |x| \leq \pi\}.$$

ESERCIZIO 6. [6] Si consideri la curva γ data dal grafico della funzione $f(x) = x(x^2 - 3)$, con $x \in [-2, 2]$, orientata da sinistra a destra. Si calcoli l'integrale curvilineo di seconda specie

$$\int_{\gamma} \omega, \quad \omega = e^x((1+x+y)dx + dy).$$

Si calcoli l'integrale $\int_{\gamma'} (\omega + \omega')$, dove γ' è la bisettrice $y = x$, con $x \in [-2, 2]$, sempre orientata da sinistra a destra, e $\omega' = y(e^{x^2} + x^{10})dy$, e si mettano in relazione i due risultati.
