Analisi Matematica per le Applicazioni – Analisi Matematica II
CdL in Ingegneria Meccanica – Anno Accademico 2024/2025

Prova scritta - Quinto appello (07-07-2025)

<u>Esercizio 0.</u>

1. Se $y(0) \neq 0$, si trova, per separazione di variabili,

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{y} = x + c,$$

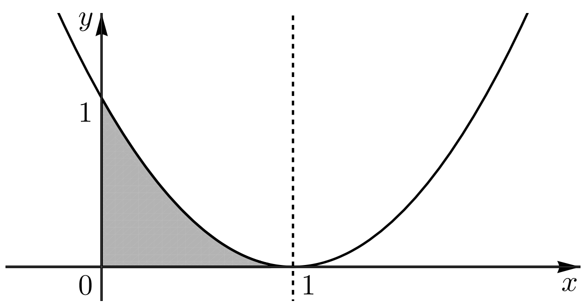
dove c è una costante arbitraria, che dipende dalla condizione iniziale $y_0 = y(0)$: si determina c richiedendo che si abbia $-1/y_0 = 0 + c$, da cui si trova $c = -1/y_0$. Quindi la soluzione è

$$y(x) = -\frac{1}{x+c} = \frac{1}{x-(1/y_0)} = -\frac{y_0}{y_0 x - 1} = \frac{y_0}{1 - x y_0}.$$

Se invece $y(0) = 0$, la soluzione è data da $y(x) = 0$.

---

2. Per disegnare l'insieme Ω si deve tener conto che $x \in [0,1]$ e che $y \in [0,(x-1)^2]$ per ogni $x \in [0,1]$. La curva $f(x) = (x-1)^2$ è una parabola che ha vertice in $x = 1$, è rivolta verso l'alto e interseca l'asse y in $f(0) = 1$ e la retta $x = 1$ in $f(1) = 0$. L'insieme Ω è rappresentato nella figura seguente.



Si ha quindi

$$\begin{aligned}\iint_\Omega y(1-x)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{(x-1)^2} \mathrm{d}y\, y(1-x)^2 = \int_0^1 \mathrm{d}x\,(1-x)^2 \int_0^{(x-1)^2} \mathrm{d}y\, y \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x (1-x)^2 \frac{y^2}{2}\bigg|_0^{(x-1)^2} = \int_0^1 \mathrm{d}x\,(1-x)^2 \frac{(x-1)^4}{2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x\,(x-1)^6,\end{aligned}$$

dove si è tenuto conto che $(1-x)^2 = (x-1)^2$. Per svolgere l'ultimo integrale, conviene utilizzare la sostituzione $t = x-1$ (che comporta $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$), così che

$$\int (x-1)^6\,\mathrm{d}x = \int t^6 \mathrm{d}t = \frac{t^7}{7} + c = \frac{(x-1)^7}{7} + c,$$

dove c è una costante arbitraria, e quindi

$$\iint_\Omega y(1-x)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\frac{(x-1)^7}{7}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left(0 - (-1)^7\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{7} = \frac{1}{14}.$$

---

3. Si trova, per separazione di variabili,
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^3} = \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x.$$
Si ha
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^3} = \int y^{-3}\mathrm{d}y = \frac{1}{-3+1}y^{-3+1} + c_1 = -\frac{1}{2}\frac{1}{y^2} + c_1$$
dove c_1 è una costante arbitraria, e, con la sostituzione $t = \cos x$ (che implica $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$),
$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = -\arctan t + c_2 = -\arctan(\cos x) + c_2,$$
dove c_2 è un'altra costante arbitraria, così che si ottiene
$$\frac{1}{2y^2} = \arctan(\cos x) + c,$$
dove la costante $c = c_1 - c_2$ si fissa imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1$, ovvero
$$\frac{1}{2} = \arctan(1) + c = \frac{\pi}{4} + c \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$
In conclusione si ha
$$y^2 = \frac{1}{2(\arctan(\cos x) + (1/2) - (\pi/4))} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{\sqrt{2\arctan(\cos x) + 1 - (\pi/2)}},$$
dove si è presa la determinazione positiva della radice quadrata poiché il dato iniziale $y(0) = 1$ è positivo.

---

4. La funzione $f(x)$ è una funzione razionale, quindi è continua in ogni punto $(x,y) \in D$ in cui il denominatore $x^2 + \sin^2 y$ non si annulla. D'altra parte, $x^2 + \sin^2 y \geq 0$ (in quanto somma di quantità non negative) e $x^2 + \sin^2 y = 0$ se e solo se $x = 0$ e $\sin y = 0$. Dal momento che $\sin y = 0$ se e solo se $y = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, e l'unico valore di k per cui $|k\pi| \leq 1$ (deve essere $|y| \leq 1$ in D) è $k = 0$, allora l'unico punto $(x,y) \in D$ in cui il denominatore di $f(x,y)$ si annulla è $(x,y) = (0,0)$, cioè l'origine. Quindi la funzione $f(x,y)$ non è definita (e di conseguenza non può essere continua) nell'origine. Per vedere se la funzione $f(x,y)$ si può estendere a una funzione continua, ovvero se si può definire $f(0,0)$ in modo che $f(x,y)$ sia continua anche in $(0,0)$, si deve studiare se esiste il limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + \sin^2 y},$$
dove il limite può essere preso lungo qualsiasi direzione, ovvero lungo qualsiasi curva che passi per l'origine. Notando che
$$0 \leq \frac{x^2}{x^2 + \sin^2 y} \leq 1,$$
poiché $\sin^2 y \geq 0$ e quindi $x^2 + \sin^2 y \geq x^2$, si può stimare
$$0 < |f(x,y)| \leq \left|\frac{x^2 y}{x^2 + \sin^2 y}\right| \leq |y|.$$
Per il teorema del confronto, poiché sia 0 sia $|y|$ tendono a zero quando (x,y) tende a $(0,0)$, si ottiene
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^2 y}{x^2 + \sin^2 y}\right| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + \sin^2 y} = 0.$$
Se ne conclude che, ponendo $f(0,0) = 0$, la funzione $f(x,y)$ si estende a una funzione continua in D.

<u>Esercizio 1.</u> Riscrivendo
$$y' = \frac{xy^4 + \sqrt{y}}{x^3 y^3} = \frac{y}{x^2} + \left(\frac{1}{x^3}\right) y^{-\frac{5}{2}},$$
si vede che si tratta di un'equazione differenziale di Bernoulli, cioè di un'equazione differenziale della forma
$$y' = a(x) y + b(x)\, y^n,$$
con
$$n = -\frac{5}{2}, \qquad a(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad b(x) = \frac{1}{x^3}.$$
Se si definisce $u = y^{1-n} = y^{\frac{7}{2}}$, si trova
$$u' = \frac{7}{2} y^{\frac{5}{2}} y' = \frac{7}{2} y^{\frac{5}{2}} \left(a(x) y + b(x) y^{-\frac{5}{2}} \right) = \frac{7}{2} a(x) u + \frac{7}{2} b(x).$$
La soluzione è data da
$$u(x) = e^{\frac{7}{2}(A(x) - A(1))} \left(u(1) + \int_1^x \mathrm{d}t\, e^{-\frac{7}{2}(A(t) - A(1)} \frac{7}{2t^3} \mathrm{d}t \right),$$
dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$, per esempio
$$A(x) = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{t}.$$
Si ha quindi
$$u(x) = e^{-\frac{7}{2x} + \frac{7}{2}} \left(1 + \frac{7}{2} e^{-\frac{7}{2}} \int_1^x \mathrm{d}t\, e^{\frac{7}{2t}} \frac{1}{t^3} \mathrm{d}t \right),$$
dove si è tenuto conto che $u(1) = (y(1))^{\frac{7}{2}} = 1$. Per calcolare l'ultimo integrale si opera la sostituzione
$$s = \frac{7}{2t} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{d}s = -\frac{7}{2} \frac{\mathrm{d}t}{t^2},$$
così che
$$\int \mathrm{d}t\, e^{\frac{7}{2t}} \frac{1}{t^3} \mathrm{d}t = -\frac{2}{7} \int e^{\frac{7}{2t}} \left(-\frac{7}{2t^2} \right) \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t = -\frac{2}{7} \int e^s \frac{2}{7}\, s\, \mathrm{d}s = -\left(\frac{2}{7}\right)^2 \int s e^s \mathrm{d}s.$$
L'ultimo integrale si calcola per parti:
$$\int s e^s \mathrm{d}s = s e^s - \int e^s \mathrm{d}s = s e^s - e^s + c,$$
dove c è una costante arbitraria. Si trova quindi
$$\int_1^x \mathrm{d}t\, e^{\frac{7}{2t}} \frac{1}{t^3} \mathrm{d}t = -e^{\frac{7}{2x}} \left(\frac{2}{7t} - \frac{2^2}{7^2} \right) + e^{\frac{7}{2}} \left(\frac{2}{7} - \frac{2^2}{7^2} \right).$$
In conclusione si ha
$$u(x) = e^{-\frac{7}{2x} + \frac{7}{2}} \left(1 - e^{\frac{7}{2x} - \frac{7}{2}} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{7} \right) + \left(1 - \frac{2}{7} \right) \right) = e^{-\frac{7}{2x} + \frac{7}{2}} \left(2 - \frac{2}{7} \right) - \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{7} \right) = \frac{12}{7} e^{-\frac{7}{2x} + \frac{7}{2}} - \frac{1}{x} + \frac{2}{7}.$$
e quindi
$$y(x) = (u(x))^{\frac{2}{7}} = \left(\frac{12}{7} e^{-\frac{7}{2x} + \frac{7}{2}} - \frac{1}{x} + \frac{2}{7} \right)^{\frac{2}{7}}.$$

<u>Esercizio 2.</u> Il polinomio caratteristico della matrice A è

$$\det(A-\lambda\mathbb{1}) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda-2).$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$. Dal momento che gli autovalori sono distinti la matrice è diagonalizzabile. Gli autovettori $v_1 = (v_{11}, v_{12})$ e $v_2 = (v_{21}, v_{22})$ associati a λ_1 e λ_2, rispettivamente, si ottengono richiedendo che si abbia $Av_1 = \lambda_1 v_1 = 0$ e $Av_2 = \lambda_2 v_2 = 2v_2$. La prima equazione dà

$$v_{11} + v_{12} = 0 \quad\Longrightarrow\quad v_{11} = -v_{12} \quad\Longrightarrow\quad v_1 = (-1, 1),$$

mentre la seconda equazione dà

$$v_{21} + v_{22} = 2v_{21} \quad\Longrightarrow\quad v_{21} = v_{22} \quad\Longrightarrow\quad v_2 = (1, 1).$$

Si ha quindi $A = CDC^{-1}$ e, di conseguenza, $e^{At} = Ce^{Dt}C^{-1}$, dove

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad e^{Dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

mentre C è la matrice le cui colonne sono i vettori v_1 e v_2. Risulta quindi

$$C = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

la cui inversa è

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} v_{22} & -v_{21} \\ -v_{12} & v_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} e^{At} = Ce^{Dt}C^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+e^{2t} & -1+e^{2t} \\ -1+e^{2t} & 1+e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La soluzione $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$ del sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2, \\ y_2' = y_1 + y_2, \\ y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = 1. \end{cases}$$

è allora data da

$$y(x) = e^{Ax}y(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+e^{2x} & -1+e^{2x} \\ -1+e^{2x} & 1+e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+3e^{2x} \\ -1+3e^{2x} \end{pmatrix}.$$

<u>Esercizio 3.</u> Il polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea associata

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

è $\lambda^2+2\lambda+5=0$. Gli zeri del polinomio sono $\lambda_\pm = -1\pm\sqrt{1-5} = -1\pm 2i$. Quindi la soluzione dell'equazione omogenea è

$$y_0(x) = e^{-x}\left(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x\right).$$

Poiché il termine non omogeneo è della forma

$$(\alpha_1 x + \beta_1)\cos x + (\alpha_2 + \beta_2)\sin x$$

e $\lambda = \pm i$ non è uno zero del polinomio caratteristico, si cerca la soluzione particolare nella forma

$$\widetilde{y}(x) = (Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\widetilde{y}\,'(x) &= -(Ax+B)\sin x + A\cos x + (Cx+D)\cos x + C\sin x,\\
\widetilde{y}\,''(x) &= -2A\sin x - (Ax+B)\cos x + 2C\cos x - (Cx+D)\sin x,
\end{aligned}$$

così che, imponendo che si abbia

$$\widetilde{y}\,'' + 2\widetilde{y}\,' + 5\widetilde{y} = x\cos x + \sin x,$$

si trova

$$\begin{aligned}
&-2A\sin x - (Ax+B)\cos x + 2C\cos x - (Cx+D)\sin x\\
&\qquad + 2\big(-(Ax+B)\sin x + A\cos x + (Cx+D)\cos x + C\sin x\big)\\
&\qquad + 5\big((Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x\big)\\
&\quad = (-C-2A+5C)\,x\sin x + (-2A-D-2B+2C+5D)\sin x\\
&\qquad + (-A+2C+5A)\,x\cos x + (-B+2C+2A+2D+5B)\cos x\\
&\quad = (4C-2A)\,x\sin x + (-2A+4D-2B+2C)\sin x\\
&\qquad + (4A+2C)\,x\cos x + (4B+2C+2A+2D)\cos x\\
&\quad = x\cos x + \sin x.
\end{aligned}$$

così che, uguagliando i coefficienti di $x\sin x$, $\sin x$, $x\cos x$ e $\cos x$, si trova, rispettivamente

$$\begin{aligned}
4C-2A &= 0,\\
-2A+4D-2B+2C &= 1,\\
4A+2C &= 1,\\
4B+2C+2A+2D &= 0.
\end{aligned}$$

La prima e la terza equazione dànno

$$A = 2C, \qquad 1-4A = 2C \quad\Longrightarrow\quad 1 = 5A \quad\Longrightarrow\quad A = \frac{1}{5} \quad\Longrightarrow\quad C = \frac{1}{10},$$

che inserite nella seconda e nella quarta equazione portano a

$$4D - 2B = 1 - \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}, \qquad 4B + 2D = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5} = -\frac{3}{5},$$

da cui si deduce che

$$2B = 2(2D) - \frac{6}{5} = 2\left(-\frac{3}{5} - 4B\right) - \frac{6}{5} \quad\Longrightarrow\quad 10B = -\frac{12}{5} \quad\Longrightarrow\quad B = -\frac{6}{25} \qquad D = -\frac{3}{10} - 2B = \frac{9}{50}.$$

La soluzione particolare è quindi data da

$$\widetilde{y}(x) = \left(\frac{x}{5} - \frac{6}{25}\right)\cos x + \left(\frac{x}{10} + \frac{9}{50}\right)\sin x,$$

così che la soluzione generale è

$$y(x) = y_0(x) + \widetilde{y}(x) = e^{-x}\left(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x\right) + \left(\frac{x}{5} - \frac{6}{25}\right)\cos x + \left(\frac{x}{10} + \frac{9}{50}\right)\sin x.$$

<u>Esercizio 4.</u> L'insieme D è il cerchio di raggio $r = 1$ con centro nell'origine. Per individuare i punti critici della funzione $f(x,y)$, si calcolano le derivate parziali e si impone che si annullino: si trova

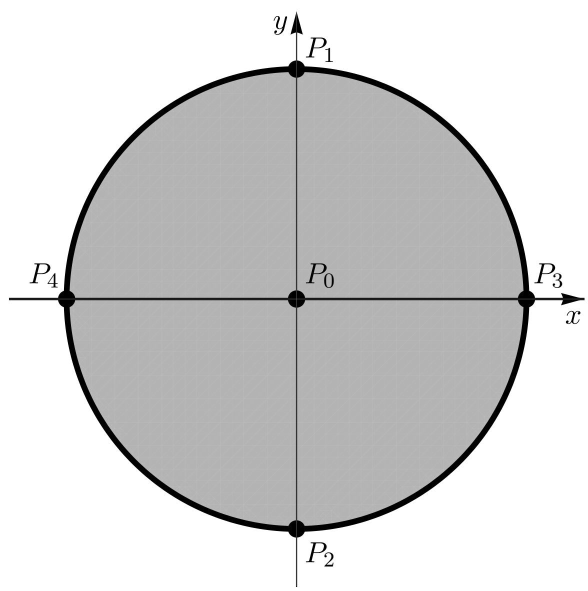
$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{2x}{1+x^2} + 2x\left(\frac{y^2}{2-y^2}\right) = 2x\left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{y^2}{2-y^2}\right),$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = (1+x^2)\frac{2y(2-y^2)+2yy^2}{(2-y^2)^2} = (1+x^2)\frac{4y-2y^3+2y^3}{(2-y^2)^2} = (1+x^2)\frac{4y}{(2-y^2)^2}.$$

Poiché

$$2 - y^2 > 0, \qquad 1 + x^2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{1+x^2} + \frac{y^2}{2-y^2} > 0,$$

per ogni $(x,y) \in D$, si ha $f_x(x,y) = 0$ se e solo se $x = 0$ e $f_y(x,y) = 0$ se e solo se $y = 0$. Quindi esiste un unico punto critico $P_0 = (0,0)$ per f ed è interno a D (cfr. la figura). Si ha $f(P_0) = f(0,0) = 0$.



Per studiare la funzione sulla frontiera $\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, si può parametrizzare la circonferenza ∂D scrivendo $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2$, dove

$$\gamma_1(t) = (t, \sqrt{1-t^2}), \quad t \in [-1,1],$$

descrive la semicirconferenza nel semipiano $y \geq 0$, mentre

$$\gamma_2(t) = (t, -\sqrt{1-t^2}), \quad t \in [-1,1],$$

descrive la semicirconferenza nel semipiano $y \leq 0$. Si noti che, data la parità di f, è sufficiente studiare $f(x,y)$ lungo γ_1. Per $(x,y) \in \gamma_1$ si ha

$$g_1(t) = f(t, \sqrt{1-t^2}) = \log(1+t^2) + \frac{(1-t^2)(1+t^2)}{2-(1-t^2)} = \log(1+t^2) + \frac{(1-t^2)(1+t^2)}{1+t^2} = \log(1+t^2) + 1 - t^2.$$

Dal momento che

$$g_1'(t) = \frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{2t}{1+t^2} - 2t = 2t\,\frac{1-(1+t^2)}{1+t^2} = -\frac{2t^3}{1+t^2}$$

esiste un solo punto critico interno, dato da $t=0$, che corrisponde al punto $P_1=(0,1)$ (cfr. la figura). Per parità ci sarà un punto critico interno per $g_2(t)=f(t,-\sqrt{1-t^2})$ per $t=0$, ovvero in corrispondenza del punto $P_2=(0,-1)$ (cfr. la figura). Si ha

$$g_1(0)=g_2(0)=1.$$

Infine bisogna calcolare $g_1(t)$ e $g_2(t)$ agli estremi dell'intervallo $[-1,1]$, ovvero per i valori $t=\pm 1$, che corrispondono ai punti $P_3=(1,0)$ e $P_4=(-1,0)$ (cfr. la figura); ovviamente si ha $g_1(1)=g_2(1)$ e $g_1(-1)=g_2(-1)$, perché le due curve γ_1 e γ_2 si raccordano agli estremi. Si trova

$$g_1(1)=g_1(-1)=g_2(1)=g_2(-1)=\log 2.$$

Poiché $\log 2<1$, concludiamo che la funzione $f(x,y)$ ha un punto di minimo in $(x,y)=(0,0)$, dove assume il valore $f(0,0)=0$, e due punti di massimo in $(x,y)=(0,\pm 1)$, dove assume il valore $f(0,\pm 1)=1$.
[*Per studiare la funzione $f(x,y)$ sulla frontiera ∂D si può anche parametrizzare ∂D come $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$, con $t\in[0,2\pi]$. Si trova allora*

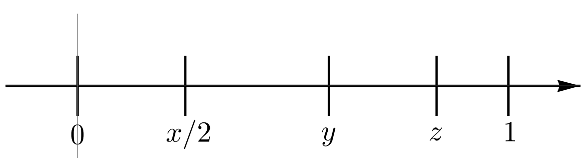
$$\begin{aligned} h(t) = f(\cos t,\sin t) &= \log(1+\cos^2 t) + \frac{\sin^2 t(1+\cos^2 t)}{2-\sin^2 t} = \log(1+\cos^2 t) + \frac{\sin^2 t(1+\cos^2 t)}{2-(1-\cos^2 t)} \\ &= \log(1+\cos^2 t) + \frac{\sin^2 t(1+\cos^2 t)}{1+\cos^2 t} = \log(1+\cos^2 t) + \sin^2 t, \end{aligned}$$

così che

$$h'(t) = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{2\sin t\cos t}{1+\cos^2 t} + 2\sin t\cos t = 2\sin t\cos t\left(1-\frac{1}{1+\cos^2 t}\right) = 2\frac{\sin t\cos^3 t}{1+\cos^2 t}.$$

Si trova quindi $h'(t)=0$ se e solo se $\sin t=0$ oppure $\cos t=0$, ovvero se e solo se $t\in\{0,\pi/2,\pi,3\pi/2\}$, dal momento che $t\in[0,2\pi]$. A tali valori di t corrispondono i punti P_1, P_2, P_3 e P_4.]

<u>Esercizio 5.</u> Per calcolare l'integrale triplo occorre tener conto delle condizioni imposte sulle variabili (cfr. la figura): una volta fissato $z\in[0,1]$, si deve avere $y\in[0,z]$, e, fissato y, si deve avere $x/2\in[0,y]$, ovvero $x\in[0,2y]$.



Si ha pertanto

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega z\,(z-x)\,(z-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^z \mathrm{d}y \int_0^{2y} \mathrm{d}x\, z\,(z-x)\,(z-y) \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}z\, z \int_0^z \mathrm{d}y\,(z-y) \int_0^{2y} \mathrm{d}x\,(z-x)\,, \end{aligned}$$

Gli integrali si calcolano in successione: integrando in x si trova,

$$\int_0^{2y} \mathrm{d}x\,(z-x) = \left(zx-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{2y} = 2yz - \frac{4y^2}{2} = 2yz-2y^2 = 2(yz-y^2),$$

che, moltiplicata per $(z-y)$ e integrata in y, porta a

$$\begin{aligned}\int_0^z \mathrm{d}y(z-y)\,2(yz-y^2) &= 2\int_0^z \mathrm{d}y\,\left(yz^2-2zy^2+y^3\right)\\ &= 2\left(\frac{y^2}{2}z^2-2z\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^z = z^4-\frac{4}{3}z^4+\frac{1}{2}z^4=\frac{1}{6}z^4\end{aligned}$$

Infine, integrando in z si ottiene

$$\int_0^1 \mathrm{d}z\,z\frac{z^4}{6}=\frac{1}{6}\int_0^1\mathrm{d}z\,z^5=\frac{1}{6}\frac{z^6}{6}\Bigg|_0^1=\frac{1}{36}.$$

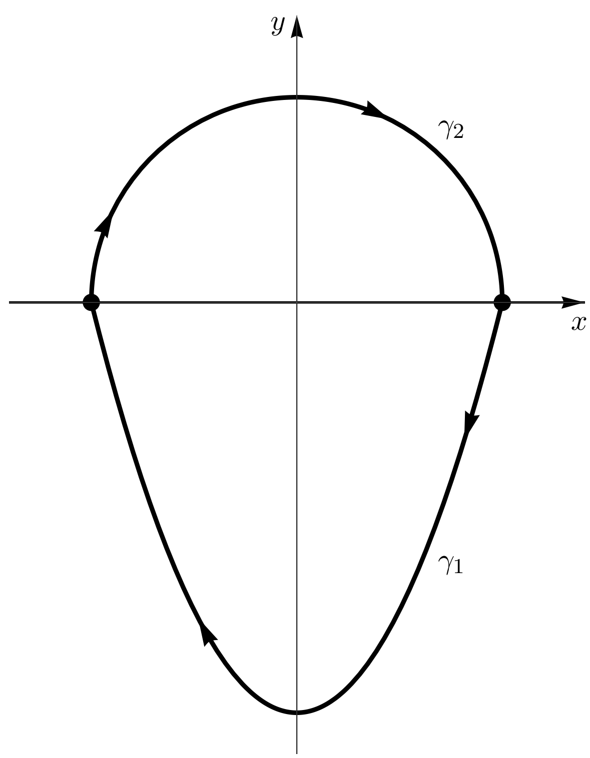
<u>Esercizio 6.</u> Il grafico della funzione $y=2(x^2-1)$ si parametrizza nella forma

$$\Gamma_1=(t,2(t^2-1)),\qquad t\in[-1,1],$$

mentre il grafico di $y=\sqrt{1-x^2}$, che descrive la semicirconferenza di raggio $r=1$ e centro nell'origine contenuta nel semipiano $y>0$, si può parametrizzare nella forma

$$\Gamma_2=(\cos t,\sin t),\qquad t\in[0,\pi].$$

La curva γ_1 ha lo stesso supporto di Γ_1 ma è percorsa in senso orario e, analogamente, curva γ_2 ha lo stesso supporto di Γ_2 ma è anch'essa percorsa in senso orario (cfr. la figura).



Tenendo conto che lungo Γ_1 si ha

$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}t,\qquad \mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}2(t^2-1)\mathrm{d}t=4t\,\mathrm{d}t$$

e che γ_1 è percorsa in senso orario, si ha quindi

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1}\omega &= -\int_{-1}^{1}\left(t^2\mathrm{d}t+\left(t+t^2+(2(t^2-1))^2\right)4t\,\mathrm{d}t\right) = -\int_{-1}^{1}\left(t^2+4t\left(t+t^2+(2t^4-t^2+2)\right)\right)\mathrm{d}t\\ &= -\int_{-1}^{1}\left(5t^2+4t\left(2t^4-3t^2+2\right)\right)\mathrm{d}t = -5\int_{-1}^{1}t^2\,\mathrm{d}t-\int_{-1}^{1}t\left(2t^4-3t^2+2\right)\mathrm{d}t\\ &= -5\int_{-1}^{1}t^2\,\mathrm{d}t = -5\frac{t^3}{3}\bigg|_{-1}^{1} = -\frac{5}{3}+\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{10}{3},\end{aligned}$$

dove si è tenuto conto che

$$\int_{-1}^{1}t\left(2t^4-3t^2+2\right)\mathrm{d}t = 0$$

dal momento che la funzione integranda è dispari. Lungo la curva Γ_2 si ha

$$\mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t,\qquad \mathrm{d}y = \cos t\,\mathrm{d}t,$$

così che, di nuovo tenendo conto che γ_2 è percorsa in senso opposto rispetto a Γ_2, si ha

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1}\omega &= -\int_{0}^{\pi}\left(\cos^2 t\,(-\sin t)\,\mathrm{d}t+\left(\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t\right)(\cos t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= -\int_{0}^{\pi}\left(-\sin t\,\cos^2 t+\cos^2 t+\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)\cos t\right)\mathrm{d}t\\ &= -\int_{0}^{\pi}\left(-\sin t\,\cos^2 t+\cos^2 t+\cos t\right)\mathrm{d}t\\ &= -\left(\frac{1}{3}\cos^3 t+\frac{\cos t\sin t+t}{2}+\sin t\right)\bigg|_{0}^{\pi} = -\left(\left(-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{2}{3}-\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

dove si è tenuto conto che, con la sostituzione $\cos t = u$ (da cui segue che $-\sin t\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$), si ottiene

$$\int\left(-\sin t\,\cos^2 t\right)\mathrm{d}t = \int u^2\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}u^3+c_1 = \frac{1}{3}\cos^3 t+c_1,$$

mentre, integrando per parti, si trova

$$\begin{aligned}\int\cos^2 t\,\mathrm{d}t &= \int(\cos t)(\cos t)\,\mathrm{d}t = \int(\cos t)(\sin t)'\,\mathrm{d}t = \cos t\sin t-\int(\cos t)'(\sin t)\,\mathrm{d}t\\ &= \cos t\sin t+\int\sin^2 t\,\mathrm{d}t = \cos t\sin t+\int\left(1-\cos^2 t\right)\mathrm{d}t\\ &= \cos t\sin t+t-\int\cos^2 t\,\mathrm{d}t \quad\Longrightarrow\quad \int\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{\cos t\sin t+t}{2}+c_2,\end{aligned}$$

e, infine,

$$\int_{0}^{\pi}\cos t\,\mathrm{d}t = \sin t+c_3$$

dove c_1, c_2 e c_3 indicano delle costanti arbitrarie. In conclusione si ha

$$\int_{\gamma}\omega = \int_{\gamma_1}\omega+\int_{\gamma_2}\omega = -\frac{10}{3}+\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2} = -\frac{8}{3}-\frac{\pi}{2}.$$

[Scrivendo

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \qquad \omega_1 = x^2 \mathrm{d}x + y^2 \mathrm{d}y, \qquad \omega_2 = \left(x + x^2\right) \mathrm{d}y,$$

e notando che la forma differenziale ω_1 *è esatta, in quanto chiusa (dal momento che* $\partial x^2/\partial y = \partial y^2/\partial x = 0$*) in un insieme semplicemente connesso (ovvero* $\mathbb{R}^2$*), si ha*

$$\int_\gamma \omega_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega_2 = \int_\gamma \left(x + x^2\right) \mathrm{d}y.$$

Questo semplifica i conti nella discussione precedente: infatti si trova

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \omega_2 &= -\int_{-1}^{1} \left(t + t^2\right) 4t \,\mathrm{d}t = -4 \int_{-1}^{1} t^2 \,\mathrm{d}t = -4 \frac{t^3}{3}\bigg|_{-1}^{1} = -\frac{8}{3}, \\
\int_{\gamma_2} \omega_2 &= -\int_0^\pi \left(\cos t + \cos^2 t\right) \cos t \,\mathrm{d}t = -\int_0^\pi \left(\cos t + 1 - \sin^2 t\right) \cos t \,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^\pi \cos^2 t \,\mathrm{d}t - \int_0^\pi \cos t \,\mathrm{d}t - \int_0^\pi \left(-\sin^2 t\right) \cos t \,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

dove si è tenuto conto che

$$\int_0^\pi \cos t \,\mathrm{d}t = \sin t \Big|_0^\pi = 0, \qquad \int_0^\pi \sin^2 t \, \cos t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{3} \sin^3 t \Big|_0^\pi = 0,$$

mentre

$$\int_0^\pi \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{\cos t \sin t + t}{2}\bigg|_0^\pi = \frac{\pi}{2},$$

come segue dalla discussione precedente.]