Analisi Matematica per le Applicazioni – Analisi Matematica II
CdL in Ingegneria Meccanica – Anno Accademico 2024/2025

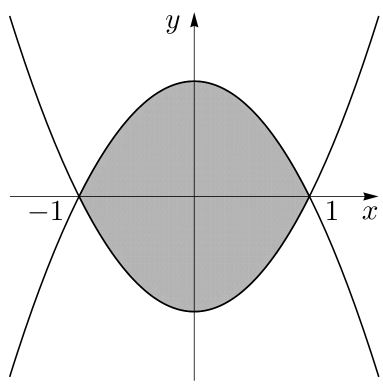
Prova scritta - Sesto appello (01-09-2025)

<u>Esercizio 0.</u>

1. L'equazione omogenea associata è $y'' - y' = 0$. Le soluzioni dell'equazione caratteristica corrispondente $\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0$ sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. Quindi la soluzione dell'equazione omogenea è
$$y_0(x) = c_1 + c_2 e^x,$$
dove c_1 e c_2 sono due costanti arbitrarie. Si cerca una soluzione particolare dell'equazione nella forma
$$\widetilde{y}(x) = x\,(ax + b) = ax^2 + bx,$$
perché $\lambda = 0$ è uno zero semplice dell'equazione caratteristica dell'equazione omogenea. Si trova $\widetilde{y}\,'(x) = 2ax + b$ e $\widetilde{y}\,''(x) = 2a$, che, introdotte nell'equazione $y'' = y' + x$, portano a
$$2a = (2ax + b) + x \quad \Longrightarrow \quad 2a + 1 = 0,\ 2a = b \quad \Longrightarrow \quad a = -1/2,\ b = -1,$$
da cui si ottiene
$$\widetilde{y}(x) = -\frac{x^2}{2} - x.$$
La soluzione generale dell'equazione differenziale è quindi
$$y(x) = y_0(x) + \widetilde{y}(x) = c_1 + c_2 e^x - \frac{x^2}{2} - x.$$

---

2. Riscrivendo $|y| + x^2 \leq 1$ nella forma $|y| \leq 1 - x^2$ e tenendo conto che $|y| \geq 0$, si vede che deve avere $x^2 \in [0,1]$ e quindi $x \in [-1,1]$. Inoltre, la disequazione $|y| \leq 1 - x^2$ si può riscrivere
$$-(1 - x^2) \leq y \leq 1 - x^2, \qquad x \in [-1,1].$$
La curva $f(x) = 1 - x^2$ è una parabola che ha vertice nel punto $(x,y) = (0,1)$, è rivolta verso il basso e interseca l'asse x in $x = \pm 1$. Analogamente, la curva $f(x) = -(1 - x^2) = x^2 - 1$ è una parabola che ha vertice nel punto $(x,y) = (0,-1)$, è rivolta verso l'alto e interseca l'asse x sempre in $x = \pm 1$. L'insieme Ω è rappresentato nella figura seguente.



Si ha quindi
$$\iint_\Omega x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} x^2 \mathrm{d}x \int_{x^2-1}^{1-x^2} \mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, x^2 \left(1 - x^2 - (x^2 - 1)\right) = 2\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\,\left(x^2 - x^4\right)$$
$$= 2\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1} = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\right) = 4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 4\frac{5-3}{15} = \frac{8}{15}.$$

---

3. Si trova, per separazione di variabili,
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}y = \int 4x\,\mathrm{d}x.$$
Si ha
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}y = \int y^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}y = \frac{1}{-\frac{3}{2}+1}y^{-\frac{3}{2}+1} + c_1 = -2y^{-\frac{1}{2}} + c_1, \qquad \int 4x\,\mathrm{d}x = 2x^2 + c_2,$$
dove c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie, così che si ottiene
$$-\frac{2}{y^{\frac{1}{2}}} = 2x^2 + c,$$
dove la costante $c = c_1 - c_2$ si fissa imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1$, ovvero
$$-2 = c \quad \Longrightarrow \quad c = -2.$$
In conclusione si ha
$$-\frac{2}{y^{\frac{1}{2}}} = 2x^2 - 2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} = 1 - x^2 \quad \Longrightarrow \quad y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-x^2} \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{(1-x^2)^2}.$$

---

4. Si ha
$$f_x(x,y) = \partial_x f(x,y) = 2x - 2y, \qquad f_y(x,y) = \partial_y f(x,y) = -2x + 1,$$
così che si trova $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ se e solo se
$$y = x, \quad x = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = y = \frac{1}{2}.$$
Dal momento che D è il quadrato con spigoli nei punti $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$, $P_3 = (1,1)$ e $P_4 = (0,1)$, il punto $P_0 = (1/2, 1/2)$ è all'interno di D ed è quindi un punto critico da considerare nella ricerca dei massi e minimi. Sulla frontiera di D si ha:
$$\begin{aligned}
x \in [0,1],\ y = 0 \quad &\Longrightarrow \quad f(x,y) = f(x,0) = g_1(x) = x^2,\\
x \in [0,1],\ y = 1 \quad &\Longrightarrow \quad f(x,y) = f(x,1) = g_2(x) = x^2 - 2x + 1,\\
y \in [0,1],\ x = 0 \quad &\Longrightarrow \quad f(x,y) = f(0,y) = g_3(y) = y,\\
y \in [0,1],\ x = 1 \quad &\Longrightarrow \quad f(x,y) = f(1,y) = g_4(y) = 1 - 2y + y = 1 - y,
\end{aligned}$$
dove

- $g_1(x)$ non ha punti critici interni all'intervallo $[0,1]$ (poiché $g_2'(x) = 2x \neq 0$ per $x \in (0,1)$),
- $g_2(x)$ non ha punti critici interni all'intervallo $[0,1]$ (poiché $g_2'(x) = 2(x-1) \neq 0$ per $x \in (0,1)$),
- $g_3(y)$ non ha punti critici interni all'intervallo $[0,1]$ (poiché $g_3'(y) = 1 \neq 0$),
- $g_4(y)$ non ha punti critici interni all'intervallo $[0,1]$ (poiché $g_4'(y) = -1 \neq 0$).

In corrispondenza degli spigoli del quadrato D si ha
$$f(P_1) = f(0,0) = 0, \qquad f(P_2) = f(1,0) = 1, \qquad f(P_3) = f(1,1) = 0, \qquad f(P_4) = f(0,1) = 1.$$
Tenuto conto che
$$f(P_0) = f(1/2, 1/2) = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$
la funzione $f(x,y)$ in D ha un punto di massimo assoluto in $P_4 = (0,1)$ e in $P_2 = (1,0)$, dove assume il valore 1, e ha un punto di minimo assoluto in $P_1 = (0,0)$ e in $P_3 = (1,1)$, dove assume il valore 0.

<u>Esercizio 1.</u> Risolvendo per separazione di variabili, si ottiene

$$\int (\sin y)^2 \cos y \, \mathrm{d}y = \int 2x(x-1)\, \mathrm{d}x,$$

dove, operando la sostituzione $\sin y = t$ nella prima equazione (così che $\mathrm{d}t = \cos y \, \mathrm{d}y$), si trova

$$\int (\sin y)^2 \cos y \, \mathrm{d}y = \int t^2 \mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} + c_1 = \frac{(\sin y)^3}{3} + c_1,$$

e

$$\int 2x(x-1)\, \mathrm{d}x = 2\int x^2 \, \mathrm{d}x - 2\int x \, \mathrm{d}x = \frac{2x^3}{3} - x^2 + c_2,$$

dove c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie, così che si ottiene

$$\frac{(\sin y)^3}{3} = \frac{2x^3}{3} - x^2 + c, \qquad c = c_1 - c_2.$$

La costante c si fissa imponendo la condizione iniziale:

$$\frac{(\sin \pi)^3}{3} = c \quad \Longrightarrow \quad c = 0,$$

da ci si deduce che

$$\frac{(\sin y)^3}{3} = \frac{2x^3}{3} - x^2 \quad \Longrightarrow \quad \sin y = \left(2x^3 - 3x^2\right)^{1/3}$$

Tenendo conto che l'equazione $y = \alpha$, con $\alpha \in [-1,1]$, ammette in $[-\pi,\pi]$ le due soluzioni $y = \arcsin \alpha$ e $y = \pi - \arcsin \alpha$, la soluzione del problema di Cauchy è quindi data da una delle due funzioni

$$y_1(x) = \arcsin\left(2x^3 - 3x^2\right)^{1/3}, \qquad y_2(x) = \pi - \arcsin\left(2x^3 - 3x^2\right)^{1/3},$$

precisamente da quella che soddisfa la condizione inziale $y(0) = \pi$. In conclusione, si ha

$$y(x) = y_2(x) = \pi - \arcsin\left(2x^3 - 3x^2\right)^{1/3}.$$

<u>Esercizio 2.</u> Il polinomio caratteristico della matrice A è

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5.$$

Quindi gli autovalori di A sono

$$\lambda = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2,$$

ovvero $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 1$. Dal momento che gli autovalori sono distinti la matrice è diagonalizzabile. Gli autovettori $v_1 = (v_{11}, v_{12})$ e $v_2 = (v_{21}, v_{22})$ associati a λ_1 e λ_2, rispettivamente, si ottengono richiedendo che si abbia $Av_1 = \lambda_1 v_1 = 5v_1$ e $Av_2 = \lambda_2 v_2 = v_2$. La prima equazione dà

$$4v_{11} + v_{12} = 5v_{11} \quad \Longrightarrow \quad v_{11} = -v_{12} \quad \Longrightarrow \quad v_1 = (1,1),$$

mentre la seconda equazione dà

$$4v_{21} + v_{22} = v_{21} \quad \Longrightarrow \quad 3v_{21} = v_{22} \quad \Longrightarrow \quad v_2 = (-1,3).$$

Si ha quindi $A = CDC^{-1}$ e, di conseguenza, $e^{At} = Ce^{Dt}C^{-1}$, dove

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}$$

mentre C è la matrice le cui colonne sono i vettori v_1 e v_2. Risulta quindi

$$C = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

la cui inversa è

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} v_{22} & -v_{21} \\ -v_{12} & v_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} e^{At} = Ce^{Dt}C^{-1} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e^{5t} & e^{5t} \\ -e^{t} & e^{t} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^{5t} + e^{t} & e^{5t} - e^{t} \\ 3e^{5t} - 3e^{t} & e^{5t} + 3e^{t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La soluzione $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$ del sistema

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + y_2, \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2, \\ y_1(0) = -1, \quad y_2(0) = 1. \end{cases}$$

è allora data da

$$y(x) = e^{Ax}y(0) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^{5x} + e^{x} & e^{5x} - e^{x} \\ 3e^{5x} - 3e^{x} & e^{5x} + 3e^{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2e^{5x} - 2e^{x} \\ -2e^{5x} + 6e^{x} \end{pmatrix},$$

ovvero

$$y_1(x) = -\frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{5x}\right), \qquad y_2(x) = \frac{1}{2}\left(3e^{x} - e^{5x}\right),$$

Esercizio 3. Il polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea associata

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

è $\lambda^2 - 6\lambda + 9$. Gli zeri del polinomio sono $\lambda_\pm = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$. Quindi gli zeri sono coincidenti e la soluzione dell'equazione omogenea è

$$y_0(x) = (c_1 + c_2 x)\, e^{3x}.$$

Si cerca la soluzione particolare dell'equazione non omogenea nella forma

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{y}_1(x) + \widetilde{y}_2(x),$$

dove $\widetilde{y}_1(x)$ risolve l'equazione $y'' - 6y' + 9y = 3$ e $\widetilde{y}_2(x)$ risolve l'equazione $y'' - 6y' + 9y = xe^{3x}$.

- Poiché il termine non omogeneo dell'equazione $y'' - 6y' + 9y = xe^{3x}$ è della forma $P_0(x)e^{3x}$, dove $P_0(x) = A_0x + B = x$ è un polinomio di primo grado, e $\lambda = 3$ è uno zero doppio del polinomio caratteristico, si cerca la soluzione particolare $\widetilde{y}_2$ nella forma

$$\widetilde{y}_2(x) = x^2(Ax + B)e^{3x}.$$

Scrivendo $\widetilde{y}_2(x) = x^2R(x)$, dove $R(x) = P(x)e^{3x} = (A_2x + B_2)e^{3x}$ risolve l'equazione omogenea associata, si ha

$$\begin{aligned} \widetilde{y}_2'(x) &= 2xR(x) + x^2R'(x), \\ \widetilde{y}_2''(x) &= 2R(x) + 4xR'(x) + x^2R''(x), \end{aligned}$$

così che, imponendo che si abbia

$$\widetilde{y}_2'' - 6\widetilde{y}_2' + 9\widetilde{y}_2 = xe^{3x},$$

si trova

$$\big(2R + 4xR' + x^2R''\big) - 6\left(2xR + x^2R'\right) + 9x^2R = xe^{3x},$$

ovvero

$$x^2\left(R'' - 6R' + 9R\right) + x\left(4R' - 12R\right) + 2R = xe^{3x},$$

dove $R'' - 6R' + 9R = 0$. Si ha inoltre

$$R(x) = (A_2x + B_2)e^{3x} \quad \Longrightarrow \quad R'(x) = (A_2 + 3A_2x + 3B_2)\,e^{3x},$$

così che

$$4R' - 12R = 4\Big(A_2 + 3A_2x + 3B_2 - 3(A_2x + B_2)\Big)e^{3x} = 4A_2e^{3x}, \qquad 2R = (2A_2x + 2B_2)e^{3x}.$$

In conclusione si trova

$$\widetilde{y}_2'' - 6\widetilde{y}_2' + 9\widetilde{y}_2 = xe^{3x} \quad \Longrightarrow \quad x\left(4R' - 12R\right) + 2R = xe^{3x} \quad \Longrightarrow \quad 4A_2x + 2A_2x + 2B_2 = x,$$

e quindi

$$6A_2 = 1,\; 2B_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad A_2 = \frac{1}{6},\; B_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{y}_2(x) = \frac{x^3}{6}e^{3x}.$$

- Riguardo alla soluzione particolare $\widetilde{y}_1(x)$, poiché $\lambda = 0$ non risolve l'equazione caratteristica, si pone

$$\widetilde{y}_1(x) = A_1,$$

che, introdotta nell'equazione

$$y_1'' - 6\widetilde{y}_1' + 9\widetilde{y}_1 = 3,$$

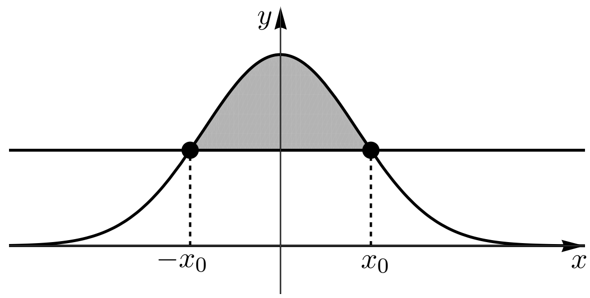
una volta che si sia tenuto conto che $\widetilde{y}_1'(x) = \widetilde{y}_1''(x) = 0$, dà $9A_1 = 3$, ovvero

$$A_1 = \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{y}_1(x) = \frac{1}{3}.$$

In conclusione, la soluzione generale è

$$y(x) = y_0(x) + \widetilde{y}(x) = (c_1 + c_2x)\,e^{3x} + \frac{1}{3} + \frac{x^3}{6}e^{3x}.$$

<u>Esercizio 4.</u> L'insieme D è dato dall'insieme dei punti del piano che si trova al di sotto del grafico della funzione $y = E(x) = 2e^{-x^2}$ e al di sopra della retta $y = 1$ (cfr. la figura seguente).



Le due curve si intersecano in corrispondenza dei punti $P_1 = (x_0, 1)$ e $P_2 = (-x_0, 1)$, con $x_0 > 0$ tale che

$$2e^{-x_0^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_0^2 = \log 2 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = \sqrt{\log 2}.$$

Per individuare i punti critici della funzione $f(x, y)$, si calcolano le derivate parziali e si impone che si annullino. Si trova

$$\begin{aligned} f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= \frac{(4xy^2e^{2x^2} + 2x)(1+x^2) - (y^2e^{2x^2} + x^2)(2x)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2x}{(1+x^2)^2}\left((2y^2e^{2x^2}+1)(1+x^2) - (y^2e^{2x^2}+x^2)\right), \\ f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= \frac{2ye^{2x^2}}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Poiché

$$e^{2x^2} > 0, \qquad 1 + x^2 > 0,$$

si ha $f_y(x, y) = 0$ se e solo se $y = 0$ e quindi, notando che

$$f_x(x,0) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}\left(1 + x^2 - x^2\right) = \frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

si ha $f_x(x, 0) = 0$ se e solo se $x = 0$. In conclusione la funzione $f(x, y)$ ammette un solo punto critico, ovvero $(0, 0)$, che è all'esterno del dominio D. Ne segue che la funzione $f(x, y)$ raggiunge il suo minimo e il suo massimo sulla frontiera di D.

La frontiera di D è costituita da due curve, il segmento

$$\gamma_1 = \left\{(x,1) : -\sqrt{\log 2} < x\sqrt{\log 2}\right\}$$

e l'arco di curva

$$\gamma_2 = \left\{(x, E(x)) : -\sqrt{\log 2} < x\sqrt{\log 2}\right\},$$

dove $E(x) = 2e^{-x^2}$, e dai punti P_1 e P_2 che costituiscono gli estremi delle due curve.

Lungo γ_1 si ha

$$f(x,y) = f(x,1) = g(x) = \frac{e^{2x^2} + x^2}{1 + x^2},$$

così che

$$g'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}\left(e^{2x^2} + 2x^2 e^{2x^2} + 1\right),$$

quindi si ha $g'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$, poiché $e^{2x^2} + 2x^2 e^{2x^2} + 1 > 0$. Il valore $x = 0$ individua lungo γ_1 il punto $P_3 = (0, 1)$, e in corrispondenza di tale punto la funzione $f(x, y)$ assume il valore $f(0, 1) = g(0) = 1$.

Lungo γ_2 si ha $y = E(x) = 2e^{-x^2}$ e quindi

$$f(x, y) = f(x, E(x)) = h(x) = \frac{4 + x^2}{1 + x^2},$$

così che

$$h'(x) = \frac{2x(1 + x^2) - 2x(4 + x^2)}{(1 + x^2)} = -\frac{6x}{(1 + x^2)^2},$$

da cui si vede che risulta $h'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$. Il valore $x = 0$ individua lungo γ_2 il punto $P_4 = (0, 2)$, e in corrispondenza di tale punto la funzione $f(x, y)$ assume il valore $f(0, 2) = h(0) = 4$.

Infine, i corrispondenza dei punti P_1 e P_2 si ha

$$f(P_1) = f(x_0, E(x_0)) = h(x_0) = g(x_0), \qquad f(P_2) = f(-x_0, E(-x_0)) = h(-x_0) = g(-x_0),$$

dove $E(x_0) = E(-x_0) = 1$ e

$$g(x_0) = g(-x_0) = \frac{4 + x_0^2}{1 + x_0^2} = \frac{4 + \log 2}{1 + \log 2}.$$

In conclusione i punti di massimo e di minimo della funzione $f(x, y)$ nel dominio D vanno cercati tra i punti

$$P_1 = (x_0, 1), \qquad P_2 = (-x_0, 1), \qquad P_3 = (0, 1), \qquad P_4 = (0, 2).$$

Tenendo conto che si ha

$$f(P_1) = f(P_2) = \frac{4 + \log 2}{1 + \log 2}, \qquad f(P_3) = 1, \qquad f(P_4) = 4$$

e utilizzando il fatto che $1 + \log 2 < 4 + \log 2 < 4 + 4 \log 2 = 4(1 + \log 2)$ per dedurre che

$$1 < \frac{4 + \log 2}{1 + \log 2} < 4,$$

si conclude che P_3 è il punto di minimo di $f(x, y)$, mentre P_4 è il punto di massimo.

<u>Esercizio 5.</u> Il dominio di integrazione Ω è dato da (cfr. la figura seguente)

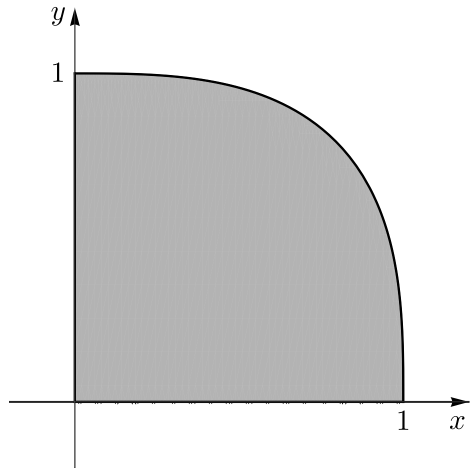
$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le (1 - x^3)^{\frac{1}{3}}\right\}.$$

Si ha pertanto, tenendo conto che $|xy| = |x|\,|y| = xy$ per $x, y \ge 0$,

$$12 \iint_\Omega |xy|^5 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 12 \iint_\Omega x^5 y^5 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 12 \int_0^1 \mathrm{d}x \, x^5 \int_0^{(1-x^3)^{\frac{1}{3}}} y^5 \mathrm{d}y,$$

dove

$$\int_0^{(1-x^3)^{\frac{1}{3}}} y^5 \mathrm{d}y = \left.\frac{y^6}{6}\right|_0^{(1-x^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{(1 - x^3)^2}{6} = \frac{1}{6}\left(1 - 2x^3 + x^6\right),$$



così che

$$12 \iint_{\Omega} |xy|^5 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{12}{6} \int_0^1 \mathrm{d}x \, x^5 \left(1 - 2x^3 + x^6\right) = 2 \left(\int_0^1 \mathrm{d}x \, x^5 - 2 \int_0^1 \mathrm{d}x \, x^8 + \int_0^1 \mathrm{d}x \, x^{11} \right)$$
$$= 2 \left(\left. \frac{x^6}{6} \right|_0^1 - 2 \left. \frac{x^9}{9} \right|_0^1 + \left. \frac{x^{12}}{12} \right|_0^1 \right) = 2 \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{9} + \frac{1}{12} \right) = 2 \frac{6 - 8 + 3}{36} = \frac{1}{18}.$$

Nel caso in cui il dominio è dato da $\Omega = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^3 + |y|^3 \leq 1\big\}$, si può scrivere

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4,$$

dove

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \, y \geq 0, \, x^3 + y^3 \leq 1\big\}, \\
\Omega_2 &= \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, \, y \geq 0, \, (-x)^3 + y^3 \leq 1\big\}, \\
\Omega_3 &= \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \, y \leq 0, \, x^3 + (-y)^3 \leq 1\big\}, \\
\Omega_4 &= \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, \, y \leq 0, \, (-x)^3 + (-y)^3 \leq 1\big\}.
\end{aligned}$$

Il dominio Ω si ottiene quindi dal dominio della figura precedente mediante, prima, una riflessione rispetto all'asse y in modo da ottenere il dominio $\Omega' = \Omega_1 \cup \Omega_2$ e, quindi, mediante una riflessione del dominio Ω' rispetto all'asse x (cfr. la figura seguente).

Si ha inoltre, per parità,

$$\iint_{\Omega_1} |xy|^5 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega_2} |xy|^5 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega_3} |xy|^5 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega_4} |xy|^5 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

ovvero

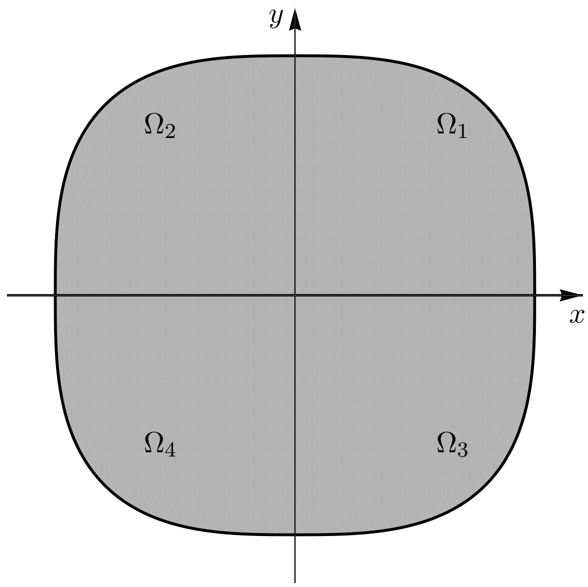
$$\iint_{\Omega} |xy|^5 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4 \iint_{\Omega_1} |xy|^5 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove

$$\iint_{\Omega_1} |xy|^5 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{18}$$

è l'integrale calcolato precedentemente. In conclusione, si trova

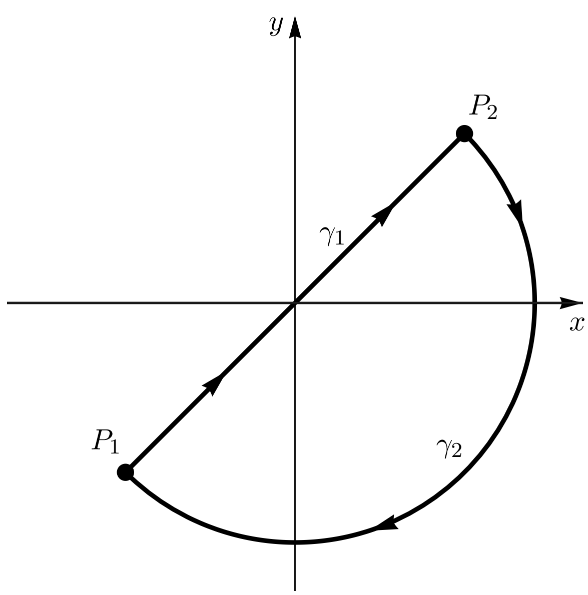
$$\iint_{\Omega} |xy|^5 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}.$$



<u>Esercizio 6.</u> La curva γ (rappresentata nella figura) è data da $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, dove

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \{(t,t) : t \in [-2,2]\}\,, \\ \gamma_2 &= \left\{(2\sqrt{2}\cos(-t), 2\sqrt{2}\sin(-t)) : t \in [-\pi/4, 3\pi/4]\right\}. \end{aligned}$$

dove, nella parametrizzazione delle due curve, si è tenuto conto del loro verso di percorrenza (che è tuttavia irrilevante ai fini del calcolo dell'integrale di prima specie).



Si ha quindi

$$\oint_\gamma f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{\gamma_1} f(x,y)\mathrm{d}s + \int_{\gamma_2} f(x,y)\mathrm{d}s.$$

Lungo la curva γ_1, dove $(x,y)=(t,t)$, si ha $\gamma'(t)=(1,1)$ e quindi $\|\gamma_1'(t)\|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, così che

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(x,y)\mathrm{d}s &= \int_{-2}^{2}\mathrm{d}t\,\frac{(t+t)^2}{8}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}\int_{-2}^{2}(2t)^2\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-2}^{2}t^2\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{t^3}{3}\bigg|_{-2}^{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{8}{3}-\frac{-8}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{16}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

Lungo la curva γ_2, dove $\gamma_2(t)=(2\sqrt{2}\cos(-t),2\sqrt{2}\sin(-t))=(2\sqrt{2}\cos t,-2\sqrt{2}\sin t)$, così che $\|\gamma_2'(t)\|=2\sqrt{2}$, si ha

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} f(x,y)\mathrm{d}s &= \int_{-\pi/4}^{3\pi/4}\mathrm{d}t\,\frac{(2\sqrt{2})^2}{8}\,(\cos t-\sin t)^2\,2\sqrt{2} = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4}\mathrm{d}t\,\frac{(2\sqrt{2})^2}{8}\,\big(\cos^2 t+\sin^2 t-2\cos t\sin t\big)\,2\sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}(1-2\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}\Big(t-\sin^2 t\Big)\bigg|_{-\pi/4}^{3\pi/4} \\ &= 2\sqrt{2}\left(\frac{3\pi}{4}-\left(\frac{-\pi}{4}\right)-\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\pi-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2}\pi,\end{aligned}$$

dove si è tenuto conto che (operando la sostituzione $x=\sin t$ e indicando con c una costante arbitraria)

$$\int 2\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2+c = \sin^2 t+c.$$

In conclusione si ha

$$\oint_{\gamma} f(x,y)\mathrm{d}s = \frac{8\sqrt{2}}{3}+2\sqrt{2}\pi = \left(\frac{8}{3}+2\pi\right)\sqrt{2}.$$