Analisi Matematica per le Applicazioni – Analisi Matematica II
CdL in Ingegneria Meccanica – Anno Accademico 2024/2025

Prova scritta - Sesto appello (01-09-2025)

Esercizio 0. [4*]

1. Si determini la soluzione generale dell'equazione differenziale del secondo ordine $y'' = y' + x$.

2. Si disegni l'insieme $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| + x^2 \leq 1\}$ e si calcoli l'integrale doppio $\iint_\Omega x^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

3. Si risolva il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 4xy\sqrt{y}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

4. Si determinino minimi e massimi di $f(x, y) = x^2 - 2xy + y$ in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Esercizio 1. [6] Si determini la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{2x(x-1)}{(\sin y)^2 \cos y}, \\ y(0) = \pi. \end{cases}$

Esercizio 2. [6] Si calcoli l'esponenziale della matrice At, dove $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $t \in \mathbb{R}$, e si utilizzi il risultato per calcolare la soluzione del sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + y_2, \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2, \\ y_1(0) = -1, \quad y_2(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 3. [6] Si determini la soluzione generale dell'equazione differenziale $y'' - 6y' + 9y = 3 + xe^{3x}$.

Esercizio 4. [6] Si determinino massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = \frac{y^2 e^{2x^2} + x^2}{1 + x^2}$$

nell'insieme $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2e^{-x^2}\right\}$.

Esercizio 5. [6] Si calcoli l'integrale doppio

$$12 \iint_\Omega |xy|^5 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^3 + y^3 \leq 1\right\}.$$

e si usi il risultato per calcolare lo stesso integrale per $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^3 + |y|^3 \leq 1\right\}$.

Esercizio 6. [6] Sia γ_1 il segmento che unisce i punti $P_1 = (-2, -2)$ e $P_2 = (2, 2)$ e sia γ_2 la semicirconferenza di raggio $R = 2\sqrt{2}$ che unisce P_2 a P_1 in senso orario. Si calcoli l'integrale di prima specie

$$\oint_\gamma f(x, y)\,\mathrm{d}s, \qquad f(x, y) = \frac{(x + y)^2}{8}$$

dove la curva γ è data dall'unione di γ_1 e γ_2.
