

A.A. 2022/2023, Appello 5, esercizio 1

$$\begin{cases} xy y' = 1 \\ y(-1) = -1 \end{cases}$$

Per separazione di variabili:

$$y y' = \frac{1}{x}$$

$$\int y y' dx = \int \frac{1}{x} dx$$

sostituzione $z = y'(x) \Rightarrow \int y y' dx = \int y'(x) dx y(x)$

$$= \int dz z = \frac{1}{2} z^2 = \frac{1}{2} (y'(x))^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (y(x))^2 = \log|x| + C$$

$$x = -1 \Rightarrow y(-1) = -1 \Rightarrow \frac{1}{2} (y(-1))^2 = \log|-1| + C$$

$$\frac{1}{2} = \log 1 + C = C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} (y(x))^2 = \log|x| + \frac{1}{2}$$

$$(y(x))^2 = 2 \log|x| + 1 = \log|x|^2 + 1 = \log(x^2) + 1$$

$$\Rightarrow y(x) = \pm \sqrt{1 + \log(x^2)}$$

per la condizione iniziale

$$\text{Per } x = -1 \Rightarrow y(-1) = \pm \sqrt{1 + \log 1} = \pm \sqrt{1} = -1$$

segno -

Quindi $y(x) = -\sqrt{1 + \log(x^2)}$