

$$y'' - 2y' + y = x e^x$$

(1) eq. omogenea $y'' - 2y' + y = 0$

↓

eq. caratteristica $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

soluzione generale $y_0(x) = (\alpha + \beta x) e^x$

(*) $A = \frac{1}{6}, B = 0$

↓

$$\tilde{y}(x) = \frac{1}{6} x^3 e^x$$

↓

$$y(x) = (\alpha + \beta x) e^x + \frac{1}{6} x^3 e^x$$

è la soluzione generale

(2) eq. non omogenea:

$$x e^x = e^{\lambda x} (A_n(x) \cos(\nu x) + B_n(x) \sin(\nu x))$$

dove $\lambda = 1, \nu = 0, n = 1 \Rightarrow A_n(x) = x$

$$\Rightarrow \lambda + i\nu = 1 = \lambda_1 = \lambda_2$$

$$\Rightarrow \lambda \text{ è radice doppia dell'eq. caratteristica}$$

$$\Rightarrow \tilde{y}(x), \text{ soluzione particolare dell'eq. non omogenea, va cercata nella forma:}$$

$$\tilde{y}(x) = x^2 \alpha_1(x) e^{\lambda x}, \text{ con } \lambda = 1$$

dove $\alpha_1(x) = Ax + B$ è un polinomio di grado 1

Imponendo che $\tilde{y} = x^2 (Ax + B) e^x = x^2 Q(x)$ risolva

l'eq. non omogenea e usando il fatto che:

i) $Q'' - 2Q' + Q = 0$ (Q risolve l'eq. omog.)

ii) $\tilde{y}' = 2xQ + x^2 Q', \tilde{y}'' = 2Q + 4xQ' + x^2 Q''$

si trova: $\tilde{y}'' - 2\tilde{y}' + \tilde{y} = 2Q + 4xQ' + x^2 Q'' - 2(2xQ + x^2 Q') + x^2 Q = 2Q + 4xQ' - 4xQ + x^2(Q'' - 2Q' + Q) = 2Q + 4x(Q' - Q) = x e^x$

Poiché $Q' = (A + Ax + B) e^x \Rightarrow 2Q + 4x(Q' - Q) =$

$$= [2(Ax + B) + 4x(A + Ax + B - Ax - B)] e^x = (6Ax + 2B) e^x = x e^x$$

(*)