# A.A. 2023/2024, Appello 3, esercizio 3

$$y'' - 4y' + 3y = e^x + 2e^{2x} + 3e^{3x}$$

1) eq.ne omogenea

(*) $y'' - 4y' + 3y = 0 \Rightarrow$ Eq. caratt. $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$\lambda = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow$ sol. generale dell'eq. omog. $y_0(x) = \alpha e^x + \beta e^{3x}$

2) soluzione particolare $\tilde{y}$

si considerano le 3 eq. non omogenee:

2.1) $y'' - 4y' + 3y = e^x$

2.2) $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$

2.3) $y'' - 4y' + 3y = 3e^{3x}$

Siano $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3$ soluzioni particolari di 2.1), 2.2), 2.3), rispettiv.

$\Rightarrow \tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_3$

Scrivendo $e^x, 2e^{2x}, 3e^{3x}$ nella forma:

$$e^{\lambda x}\left(A_n(x)\cos(\nu x) + B_n(x)\sin(\nu x)\right)$$

si ha: 2.1) $\Rightarrow \lambda = 1, n = 0, \nu = 0 \Rightarrow \lambda + i\nu = 1 = \lambda_1$

$\Rightarrow \tilde{y}_1 = A_1 x e^x = x Q(x)$, dove $Q(x) = A_1 e^x$

Poiché $Q'' - 4Q' + 3Q = 0$ ($Q$ è soluzione di (*))

e $\tilde{y}_1' = Q + xQ'$, $\tilde{y}_1'' = 2Q' + xQ''$, si trova:

$\tilde{y}_1'' - 4\tilde{y}_1' + 3\tilde{y}_1 = 2Q' + xQ'' - 4(Q + xQ') + 3xQ$

$= 2Q' - 4Q + x(\underbrace{Q'' - 4Q' + 3Q}_{0}) =$

$= 2Q' - 4Q = 2(A_1 e^x - 2A_1 e^x) = -2A_1 e^x$

$\Rightarrow \tilde{y}_1'' - 4\tilde{y}_1' + 3\tilde{y}_1 = e^x \Rightarrow -2A_1 = 1 \Rightarrow A_1 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \tilde{y}_1 = -\frac{1}{2} x e^x$

2.2) $\Rightarrow \lambda = 2, n = 0, \nu = 0 \Rightarrow \lambda + i\nu = 2 \neq \lambda_1, \lambda_2$

$\Rightarrow \tilde{y}_2 = A_2 e^{2x}$

Quindi si trova

$\tilde{y}_2'' - 4\tilde{y}' + 3\tilde{y} = 4A_2 e^{2x} - 4(2A_2 e^{2x}) + 3(A_2 e^{2x})$

$= A_2 e^{2x}(4 - 8 + 3) = -A_2 e^{2x}$

$\Rightarrow \tilde{y}_2'' - 4\tilde{y}' + 3\tilde{y} = 2e^{2x}$ implica

$-A_2 = 2 \Rightarrow A_2 = -2$

$\Rightarrow \tilde{y}_2 = -2e^{2x}$

2.3) $\Rightarrow \lambda = 3, n = 0, \nu = 0 \Rightarrow \lambda + i\nu = 3 = \lambda_2$

$\Rightarrow \tilde{y}_3 = A_3 x e^{3x} = xQ(x)$, dove $Q(x) = A_3 e^{3x}$

Poiché $Q'' - 4Q + 3Q = 0$ e

$\tilde{y}_3' = Q + xQ'$, $\tilde{y}_3'' = 2Q' + xQ''$, si trova

$\tilde{y}_3'' - 4\tilde{y}_3' + 3\tilde{y}_3 = 2Q' + xQ'' - 4(Q + xQ') + 3xQ$

$= 2Q' - 4Q + x(Q'' - 4Q' + 3Q)$

$= 2Q' - 4Q = 2(3A_3 e^{3x}) - 4(A_3 e^{3x})$

$= 2A_3 e^{3x}$

Imponendo $\tilde{y}_3'' - 4\tilde{y}_3' + 3\tilde{y}_3 = 3e^{3x}$, si trova

$2A_3 e^{3x} = 3e^{3x} \Rightarrow 2A_3 = 3 \Rightarrow A_3 = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \tilde{y}_3 = \frac{3}{2} x e^{3x}$

In conclusione $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 = -\frac{1}{2} x e^{x} - 2e^{2x} + \frac{3}{2} x e^{3x}$

e la soluzione generale dell'eq. non omogenea è:

$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{3x} - \frac{1}{2} x e^{x} - 2e^{2x} + \frac{3}{2} x e^{3x}$