BDG, esercizio 17.6 (pag. 505)

g) $y'' + 2y' - 3y = e^{\lambda x} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Eq. omogenea $\quad y'' + 2y' - 3y = 0 \quad (*)$

Eq. caratteristica $\quad \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{1+3} =$

$= -1 \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$

soluzione generale dell'eq. omog.:

$$y_0(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-3x}$$

Soluzione particolare dell'eq. non omog.:

i) se $\lambda \notin \{1, -3\} \Rightarrow \tilde{y}(x) = Ae^{\lambda x}$

$$\tilde{y}'' + 2\tilde{y}' - 3\tilde{y} = A(\lambda^2 + 2\lambda - 3)e^{\lambda x}$$

$\Rightarrow$ ponendo $\tilde{y}'' + 2\tilde{y}' - 3\tilde{y} = e^{\lambda x}$ si trova

$$A(\lambda^2 + 2\lambda - 3)e^{\lambda x} = e^{\lambda x}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\lambda^2 + 2\lambda - 3} \Rightarrow \tilde{y}(x) = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2 + 2\lambda - 3}$$

ii) se $\lambda = 1$ oppure $\lambda = -3 \Rightarrow \tilde{y}(x) = Ae^{\lambda x}x$

$$\tilde{y}'' + 2\tilde{y}' - 3\tilde{y} = A(2e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x} + 2(e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x})$$

$$- 3e^{\lambda x}x) = Ae^{\lambda x}(2\lambda + \lambda^2 x + 2$$

$$+ 2\lambda x - 3x) = e^{\lambda x}$$

$$\Rightarrow A(2\lambda + 2 + x\underbrace{(\lambda^2 + 2\lambda - 3)}_{=0 \text{ poiché } \lambda \in \{1, -3\}}) = 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2(\lambda + 1)}$$

$\Rightarrow$ se $\lambda = 1$, $\tilde{y}(x) = \frac{x}{4}e^{x}$; se $\lambda = -3$, $\tilde{y}(x) = -\frac{x}{4}e^{-3x}$

Quindi la soluzione è: $\quad y(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-3x} + \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda^2 + 2\lambda - 3}$

se $\lambda \notin \{1, -3\}$; $y(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-3x} + \frac{x}{4}e^{x}$ se $\lambda = 1$ e

$y(x) = \alpha x + \beta e^{-3x} - \frac{x}{4}e^{-3x}$ se $\lambda = -3$

h) $y'' + 2y' - 3y = \cos x$

Eq. omog. come in 8):

$$y_0(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-3x}$$

Soluzione particolare dell'eq. non omogenea:

$$\tilde{y}(x) = A\cos x + B\sin x$$

$$\Rightarrow \tilde{y}'(x) = -A\sin x + B\cos x$$

$$\tilde{y}''(x) = -A\cos x - B\sin x$$

$\Rightarrow \tilde{y}'' + 2\tilde{y}' - 3\tilde{y} = \cos x$ implica:

$$(-A\cos x - B\sin x) + 2(-A\sin x + B\cos x)$$

$$-3(A\cos x + B\sin x) = \cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -A + 2B - 3A = 1 & \text{(coeff. di } \cos x) \\ -B - 2A - 3B = 0 & \text{(coeff. di } \sin x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2B = 4A + 1 \\ 2A = -4B \Rightarrow A = -2B \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2B = 4A + 1 = -8B + 1 \Rightarrow 10B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow A = -2B = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \tilde{y}(x) = -\frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$$

La soluzione è:

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-3x} - \frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$$

i) $y'' + y = x^3 - x + 1$

soluzione dell'omogenea $y_0(x)$ t.c. $y_0'' + y = 0$

Eq. caratteristica $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$

$$\Rightarrow y_0(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$$

Soluzione della non omogenea $y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x)$,

dove $\tilde{y}(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

Quindi:

$$\tilde{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$\tilde{y}'' = 6Ax + 2B$$

$\Rightarrow \tilde{y}'' + \tilde{y}' = x^3 - x + 1$ implica

$$6Ax + 2B + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = x^3 - x + 1$$

$\Rightarrow A = 1$ (coeff. di x^3)

$B = 0$ (coeff. di x^2)

$6A + C = -1$ (coeff. di x)

$2B + D = 1$ (coeff. di $x^0 = 1$)

$\Rightarrow A = 1,\ B = 0,\ C = -1 - 6 = -7,\ D = 1 - 2B = 1$

Quindi: $\tilde{y}(x) = x^3 - 7x + 1$

$$y(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x + x^3 - 7x + 1$$