FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2024/2025

Primo appello (23-06-2025)

<u>Esercizio 1.</u> [6+2] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{(x^2-1)^4(4-x^2)}{x^2}.$$

1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
4. Si individuino i dati iniziali che generano traiettorie periodiche.
5. Si dimostri che esistono traiettorie asintotiche.
6. [Si discuta se il tempo di fuga di eventuali traiettorie illimitate sia finito o infinito.]

<u>Esercizio 2.</u> [6+2] Si consideri, in un sistema di riferimento fisso $k = Oxyz$, una guida γ_1, posta nel piano verticale xy e descritta dall'equazione $y = f(x) = x^2(x-3)$. Un carrello si muove lungo la guida γ_1, con velocità costante $v_0 = 1$ lungo la direzione dell'asse x, in modo da trovarsi all'istante $t = 0$ nell'origine O. Sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento mobile solidale con il carrello, la cui origine coincide con la posizione del carrello e i cui assi ξ, η e ζ sono il primo tangente alla guida γ_1, il secondo ortogonale alla guida, rivolto verso l'alto rispetto alla guida stessa, e il terzo parallelo all'asse z. Un secondo carrello, che indichiamo con P, si muove lungo una seconda guida γ_2, posta sempre nel piano xy e descritta dall'equazione $y = x^2$. All'istante iniziale $t = 0$, il carrello P si trova nel punto che ha coordinate $(-1, 1, 0)$ nel sistema k e si muove con velocità costante v nella direzione dell'asse x.

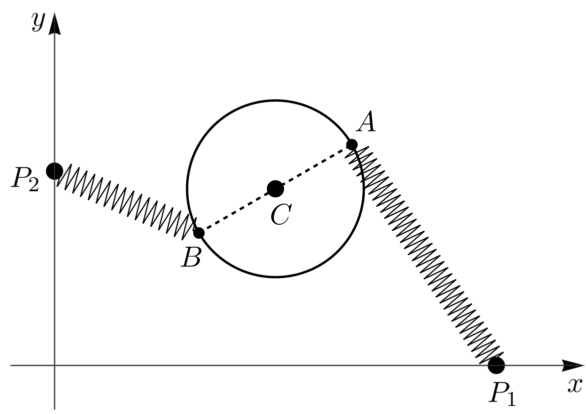
1. Si descriva il moto del carrello P nel sistema di riferimento K come composizione di una rotazione B e di una traslazione C.
2. Si determino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento del carrello P.
3. [Si calcoli in che punto si intersecano le due guide e si determini quale valore v non deve avere perché due carrelli non si scontrino mai.]

<u>Esercizio 3.</u> [6+3] Un sistema meccanico è costituito da un punto materiale P di massa $m = 1$ e da un'asta omogenea di massa $M = 2$ e lunghezza $\ell = 1$, che si muovono nel piano verticale xy nel modo seguente: il punto P scorre lungo la guida parabolica di equazione $y = 1 + x^2$; un estremo A dell'asta è fissato nell'origine $O = (0, 0)$; l'altro estremo B dell'asta è collegato da una molla di lunghezza a riposo trascurabile e di costante elastica k al punto P. Sul sistema agisce inoltre la forza di gravità, diretta nel verso discendente dell'asse y (sia g l'accelerazione di gravità).

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si dimostri che esistono due configurazioni di equilibrio in cui il punto P si trova nel punto più basso della guida e se ne discuta la stabilità in funzione dei parametri positivi k e g.
3. [Si argomenti che alcuni valori di k e g compaiono altri punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità; in particolare, si studi qualitativamente il diagramma di biforcazione delle configurazioni di equilibrio al variare di un opportuno parametro che dipenda da k e g.]

Esercizio 4. [6+2] Un sistema meccanico è costituito da un disco omogeneo di raggio R e massa M, vincolato a muoversi in un piano verticale, e da due punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa m, vincolati a muoversi il primo lungo un asse orizzontale r_1 e il secondo lungo un asse verticale r_2 nello stesso piano in cui si muove il disco. Due molle, entrambe di lunghezza a riposo trascurabile e di costante elastica k, collegano due punti antipodali A e B del bordo del disco ai punti P_1 e P_2, rispettivamente. Il disco e i punti sono inoltre sottoposti alla forza di gravità, diretta nel verso discendente dell'asse y (si indichi con g l'accelerazione di gravità).

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. (Si scelga un sistema di riferimento in cui gli assi x e y coincidano con gli assi r_1 e r_2).
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio.
3. [Si discuta la stabilità delle configurazioni di equilibrio.]



Esercizio 5. [6+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$
\begin{cases}
Q_1 = q_1 + q_1 q_2, \\
Q_2 = q_2 + q_1 q_2, \\
P_1 = \dfrac{p_1 + q_1 p_1 - q_2 p_2}{1 + q_1 + q_2}, \\
P_2 = \dfrac{p_2 + q_2 p_2 - q_1 p_1}{1 + q_1 + q_2},
\end{cases}
$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
2. Si dimostri che la trasformazione è canonica trovandone una funzione generatrice di seconda specie $F(q_1, q_2, P_1, P_2)$.
3. Si ponga $\Phi(q_1, q_2) = (\Phi_1(q_1, q_2), \Phi_2(q_1, q_2)) = (q_1 + q_1 q_2, q_2 + q_1 q_2)$, in modo da scrivere le prime due equazioni che definiscono la trasformazione di coordinate data nella forma $(Q_1, Q_2) = \Phi(q_1, q_2)$: si scrivano le ultime due equazioni della trasformazione in termini della matrice jacobiana della funzione Φ.
4. [Si verifichi esplicitamente che la trasformazione di coordinate conserva le parentesi di Poisson fondamentali].