FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2024/2025

Secondo appello - Soluzioni (08-07-2025)

<u>Esercizio 1.</u> La funzione

$$V(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \log|x|$$

è definita per ogni $x \neq 0$. Inoltre $V(x)$ è pari in x, quindi è sufficiente studiarla in $(0, +\infty)$. Tenendo conto che $|x| = x$ per $x > 0$, si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} V(x) &= \lim_{x\to+\infty} \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty, \\
\lim_{x\to 0^+} V(x) &= \lim_{x\to 0^+} \left(x^2 \log x\right) + \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{1}{x^2}\log x\right) = 0 + \infty = +\infty.
\end{aligned}$$

Inoltre si ha, sempre per $x > 0$,

$$\begin{aligned}
V'(x) &= \left(2x + \frac{2}{x^3}\right)\log x + \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x^3}\Big(2(x^4+1)\log x + (x^4-1)\Big) = \frac{x^4+1}{x^3}\left(2\log x + \frac{x^4-1}{x^4+1}\right).
\end{aligned}$$

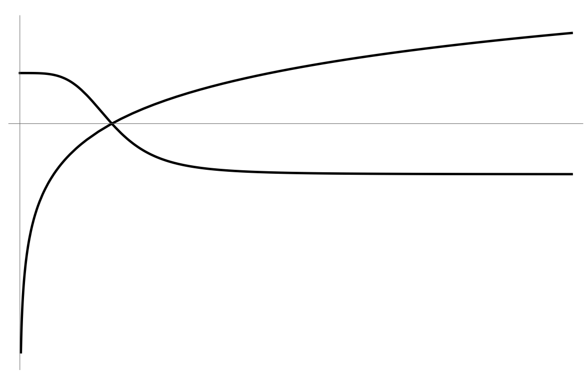
Poiché $x^4 + 1 \geq 1$ e $x^3 > 0$ per $x > 0$, si ha $V'(x) = 0$ se e solo se

$$2\log x = f(x) := \frac{1 - x^4}{1 + x^4}$$

e, analogamente, $V'(x) > 0$ se e solo se $2\log x > f(x)$. I grafici delle due funzioni $\log x$ e $f(x)$ sono rappresentati nella figura seguente (per il grafico di $f(x)$, per $x > 0$, si tenga conto che la funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e si ha

$$f(0) = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1, \qquad f'(x) = \frac{-8x^3}{(1+x^4)^2},$$

così che $f(x)$ è decrescente in $(0, +\infty)$).



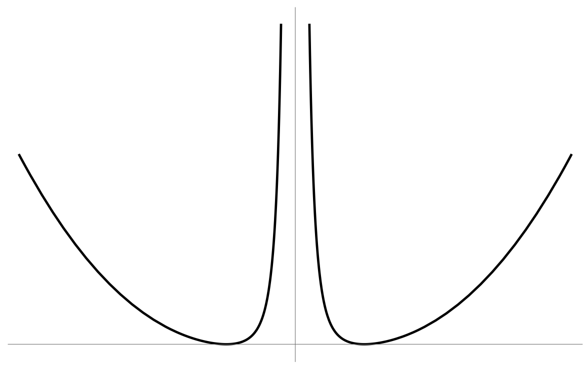
Quindi esiste un unico valore $x_0 > 0$ tale che $f(x_0) = \log x_0$. Dal fatto che $\log x = 0$ e $f(x) = 0$ per $x = 1$ si deduce che $x_0 = 1$. Dai grafici delle due funzioni si vede anche che $\log x$ è positiva se e solo se $x > 1$, mentre $f(x)$ è positiva se e solo se $x < 1$, così che

$$2\log x + \frac{x^4 - 1}{x^4 + 1} = 2\log x - f(x)$$

è positiva se e solo se $x > 1$. Ne segue che, nell'intervallo $(0, +\infty)$, la condizione $V'(x) = 0$ è verificata solo se $x = 1$ e, inoltre, si ha $V'(x) > 0$ per $x > 1$ e $V'(x) < 0$ per $x \in (0, 1)$: la funzione $V(x)$ è decrescente in $(0, 1)$ e crescente in $(1, +\infty)$. Si verifica infine che $V(1) = 0$ e, dal momento che

$$V''(x) = \left(2 - \frac{6}{x^4}\right)\log x + 2\left(2x + \frac{2}{x^3}\right)\frac{1}{x} + \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

si ha $V''(1) = 0 + 2(2+2) + 0 = 8$, consistentemente con il fatto che $x = 1$ è un punto di minimo isolato. Il grafico di $V(x)$ è rappresentato nella figura seguente.



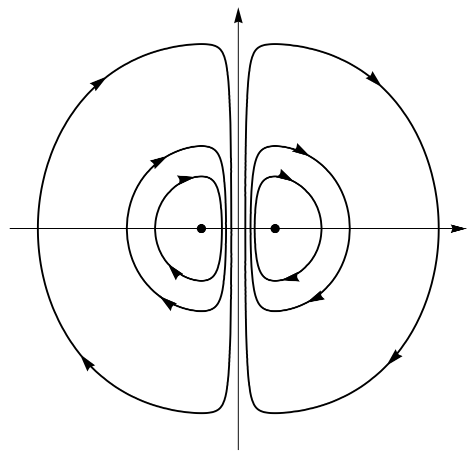
Per studiare le curve di livello

$$\Gamma_E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}y^2 + V(x)\right\},$$

si vede dal grafico dell'energia potenziale che

1. Γ_E è definita se e solo se $E \geq 0$,
2. Γ_0 consiste nei solo punti di equilibrio $(1, 0)$ e $(-1, 0)$, che sono stabili per il teorema di Lagrange-Dirichlet, essendo ± 1 punti di minimo isolati per l'energia potenziale $V(x)$.
3. Per ogni valore $E > 0$, la curva di livello Γ_E è formata da due componenti connesse γ_E^+ e γ_E^-, ciascuna delle quali consiste in una curva chiusa, la prima nel semipiano $x > 0$ e la seconda nel semipiano $x < 0$.
4. Per ogni valore $E > 0$ – in particolare per $E = E_0$ – ciascuna delle due curve γ_E^+ e γ_E^- è percorsa da una traiettoria periodica. Ne segue che tutte le traiettorie sono limitate e definite globalmente nel tempo e, con l'eccezione dei due punti di equilibrio, tutte le traiettorie sono periodiche.

Alcune orbite del sistema– inclusi i punti di equilibrio – sono rappresentate nella figura seguente (per determinare di verso di percorrenza delle orbite si tiene conto che $\dot{x} = y$, così che $x = x(t)$ è crescente per $y > 0$ e decrescente per $y < 0$: il moto avviene da sinistra a destra nel semipiano $y > 0$ e da destra a sinistra nel semipiano $y < 0$).



[Per $E = E_0$, si consideri una delle due orbite periodiche, per esempio quella con supporto nel semipiano $x > 0$. Il periodo corrispondente è dato dall'integrale definito

$$T = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2(E_0 - V(x))}},$$

dove x_- e x_+ sono i due zeri positivi dell'equazione $E_0 - V(x) = 0$, ovvero di

$$F(x) := \frac{15}{4} \log 2 - \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right) \log x = 0.$$

Si vede immediatamente che $x = 2$ è uno zero della funzione $F(x)$: infatti

$$V(2) = \left(2^2 - \frac{1}{2^2} \right) \log 2 = \left(4 - \frac{1}{4} \right) \log 2 = \frac{16 - 1}{4} \log 2 = \frac{15}{4} \log 2.$$

Per trovare l'altro zero basta notare che

$$V(1/x) = \left(\frac{1}{x^2} - x^2 \right) \log \frac{1}{x} = \left(- \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right) \right) (-\log x) = V(x),$$

da cui segue che $V(1/2) = V(2)$. Ne segue che, per $E = E_0$, si ha $x_+ = 2$ e $x_- = 1/2$ e, di conseguenza,

$$T = 2 \int_{1/2}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2(E_0 - V(x))}}$$

costituisce il periodo dell'orbita considerata.]

<u>ESERCIZIO 2.</u> Se $\boldsymbol{q}$ e $\boldsymbol{Q}$ sono le coordinate di un punto nel sistema di riferimento fisso k e nel sistema di riferimento mobile K, rispettivamente, si ha

$$\boldsymbol{q} = B\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{r},$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\theta(t)$ tale che

$$\tan\theta(t) = \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=t} = 3t^2 - 12t + 11,$$

ovvero

$$\theta(t) = \arctan(f'(t)) = \arctan\left(3t^2 - 12t + 11\right),$$

e

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (t, f(t), 0) = (t, t^3 - 6t^2 + 11t).$$

Scrivendo $\boldsymbol{q} = (x, y, z)$ e $\boldsymbol{Q} = (\xi, \eta, \zeta)$, dove $\xi(t) = vt$ e $\eta(t) = \zeta(t) = 0$, si trova quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ f(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vt\,\cos\theta(t) + t \\ vt\,\sin\theta(t) + f(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La velocità assoluta è data da

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\,\cos\theta(t) - vt\,\dot{\theta}(t)\,\sin\theta(t) + 1 \\ v\,\sin\theta(t) + vt\,\dot{\theta}(t)\cos\theta + f'(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove

$$\dot{\theta}(t) = \frac{f''(t)}{1 + (f'(t))^2} = \frac{6t - 12}{1 + (3t^2 - 12t + 11)}. \tag{$*$}$$

La velocità relativa è

$$\boldsymbol{v}' = B\dot{\boldsymbol{Q}} = \begin{pmatrix} v\,\cos\theta(t) \\ v\,\sin\theta(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

mentre la componente traslatoria della velocità di trascinamento è

$$\boldsymbol{v}_0 = \dot{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 - 6t + 11 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Infine la componente rotatoria della velocità di trascinamento è data da

$$v_T = \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{r}) = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 0 & 0 & \dot\theta(t) \\ vt\cos\theta(t) & vt\sin\theta(t) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -vt\,\dot\theta(t)\,\cos\theta(t) \\ vt\,\dot\theta(t)\,\sin\theta(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

Si verifica immediatamente che $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_T$.

La forza di Corolis che agiscono su un punto P' che ha coordinate $\boldsymbol{Q}_{P'}$ nel sistema K sono date, rispettivamente, da

$$-2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\boldsymbol{Q}}_{P'}, \qquad -m\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{Q}_{P'},$$

dove $\boldsymbol{\Omega}$ è tale che $\boldsymbol{\omega} = B\boldsymbol{\Omega}$, da cui si trova $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} = (0, 0, \dot\theta(t))$. Se P' è il carrello (così che $\boldsymbol{Q}_{P'} = \boldsymbol{0}$), entrambe le forze sono quindi nulle.
[Le coordinate del punto P nel sistema k sono

$$\boldsymbol{q} = (vt\cos\theta(t) + t, vt\sin\theta(t) + f(t), 0).$$

Si può scrivere

$$\sin\theta(t) = \frac{\tan\theta(t)}{\sqrt{1 + \tan^2\theta(t)}} = \frac{f'(t)}{\sqrt{1 + (f'(t))^2}},$$

dove si è tenuto conto che $\tan\theta(t) = f'(t)$. Il punto P attraversa l'asse x negli istanti (se esistono) in cui

$$vt\sin\theta(t) + f(t) = 0,$$

ovvero

$$F(t) := \frac{vt\, f'(t)}{\sqrt{1 + (f'(t))^2}} + f(t) = 0.$$

Si può avere $F(t) = 0$ per $t > 0$ solo se, per tale valore di t, si ha $f'(t) < 0$ (poiché $f(t) > 0$ per $t > 0$). D'altra parte $f'(t) = 3t^2 - 12t + 11 < 0$: la condizione $f'(t) < 0$ è soddisfatta se $t \in (t_-, t_+)$, dove

$$t_\pm = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 33}}{3} = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Si può avere quindi $F(t) = 0$ per qualche $t > 0$ solo se $t \in (t_-, t_+)$ e e v è tale da soddisfare la condizione

$$v = G(t) := \frac{f(t)\sqrt{1 + (f'(t))^2}}{tf'(t)}$$

per tale valore di t. Sia

$$m := \min_{t \in [t, t_+]} G(t).$$

La funzione $G(t)$ varia quindi nell'intervallo $[m, +\infty)$ per $t \in (t_-, t_+)$ e $G(t) \to +\infty$ per $t \to t_-$ e per $t \to t_+$. Ne segue che per $v > m$ esistono almeno due valori $t_1, t_2 \in [t_-, t_+]$ tali che $G(t_1) = G(t_2) = 0$. Quindi, per v sufficientemente grande il punto P attraversa almeno due volte l'asse x. Non può attraversarlo più di 2 volte poiché $\dot\theta(t) > 0$ per $t > 2$ e $\dot\theta(t) < 0$ per $t < 2$ (cfr. l'equazione $(*)$), quindi $\theta(t)$ diminuisce fino ad arrivare a un valore minimo negativo (che raggiunge per $t = 2 \in (t_-, t_+)$), in corrispondenza del quale il punto P si trova nel semipiano $y < 0$ per v sufficientemente grande, dopo di $\theta(t)$ aumenta e, una volta che diventa positivo, resta positivo per ogni t successivo.]

<u>Esercizio 3.</u> Le coordinate dei due punti P_1 e P_2 sono

$$P_1 = (x_1, y_1) = (x_1, 1), \qquad P_2 = (x_2, y_2) = (x_2, -1),$$

mentre le coordinate dei due estremi e del centro di massa dell'asta sono

$$A = (0,0), \qquad B = (x_B, y_B) = (\cos\theta, \sin\theta), \qquad C = (x_C, y_C) = \left(\frac{\cos\theta}{2}, \frac{\sin\theta}{2} \right),$$

dove θ è l'angolo che l'asta forma con l'asse x. In assenza dei vincoli (oltre a quello che il moto avvenga nel piano xy), l'energia cinetica è data da

$$T = \frac{m}{2} \left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \right) + \frac{M}{2} \left(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 \right) + \frac{M}{24} \dot{\theta}^2,$$

dove si è applicato il teorema di König e si è tenuto conto che il momento d'inerzia di un'asta omogenea di lunghezza ℓ e massa M, per rotazioni intorno a un asse passante per il suo centro di massa e ortogonale all'asse di simmetria, è $I = M\ell^2/12$, mentre l'energia potenziale è data da

$$\begin{aligned} V = mg\,(y_1 + y_2) + Mgy_C + \frac{k}{2} \Big(&(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 + (x_1 - x_B)^2 + (y_1 - y_B)^2 \\ &+ (x_2 - x_A)^2 + (y_2 - y_A)^2 + (x_2 - x_B)^2 + (y_2 - y_B)^2 \Big). \end{aligned}$$

Tenuto conto dei vincoli si ottiene

$$T_V = \frac{m}{2} \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 \right) + \frac{M}{8} \dot{\theta}^2 + \frac{M}{24} \dot{\theta}^2 = \frac{m}{2} \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 \right) + \frac{M}{6} \dot{\theta}^2$$

e

$$\begin{aligned} V_V &= \frac{Mg}{2} \sin\theta + \frac{k}{2} \Big(x_1^2 + (x_1 - \cos\theta)^2 + (1 - \sin\theta)^2 + x_2^2 + (x_2 - \cos\theta)^2 + (-1 - \sin\theta)^2 \Big) \\ &= \frac{Mg}{2} \sin\theta + k \big(x_1^2 - x_1 \cos\theta + x_2^2 - x_2 \cos\theta \big), \end{aligned}$$

dove si sono trascurati i termini costanti. Quindi la lagrangiana vincolata è

$$\mathcal{L} = T_V - V_V = \frac{m}{2} \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 \right) + \frac{M}{6} \dot{\theta}^2 - \frac{Mg}{2} \sin\theta - k \big(x_1^2 - x_1 \cos\theta + x_2^2 - x_2 \cos\theta \big)$$

e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange sono date da

$$m\ddot{x}_1 = -\frac{\partial V_V}{\partial x_1}, \qquad m\ddot{x}_2 = -\frac{\partial V_V}{\partial x_2}, \qquad \frac{M}{3} \ddot{\theta} = -\frac{\partial V_V}{\partial \theta},$$

dove

$$\frac{\partial V_V}{\partial x_1} = 2kx_1 - k\cos\theta,$$
$$\frac{\partial V_V}{\partial x_2} = 2kx_2 - k\cos\theta,$$
$$\frac{\partial V_V}{\partial \theta} = \frac{Mg}{2}\cos\theta + k(x_1+x_2)\sin\theta.$$

Le configurazioni di equilibrio del sistema si ottengono richiedendo che si abbia

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0,$$

ovvero

$$2x_1 - \cos\theta = 0, \qquad 2x_2 - \cos\theta = 0, \qquad \frac{Mg}{2}\cos\theta + k(x_1+x_2)\sin\theta = 0.$$

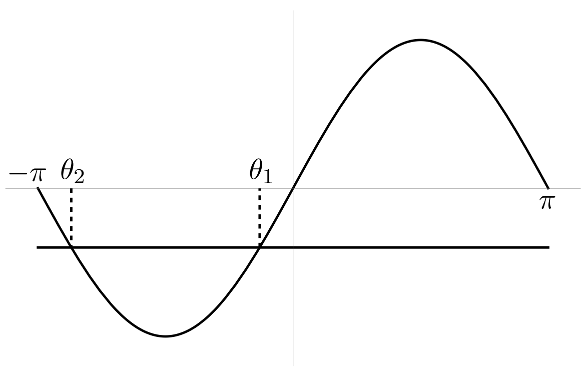
Le prime due implicano

$$x_1 = x_2 = \frac{\cos\theta}{2},$$

che, inserita nella terza, dà

$$\cos\theta\left(\frac{Mg}{2} + k\sin\theta\right) = 0,$$

che è soddisfatta o se $\cos\theta = 0$ (e quindi $\theta = \pm\pi/2$) o se $\sin\theta = -\alpha$, dove $\alpha := Mg/2k$. L'ultima condizione, considerando che $\alpha > 0$, può essere soddisfatta solo nel caso in cui risulti $\alpha \in (0,1)$ e individua due valori $\theta_1 = \arcsin(-\alpha) \in (-\pi/2, 0)$ e $\theta_2 = -\pi - \theta_1 \in (-\pi, -\pi/2)$. Si veda la figura seguente per la determinazione dei due valori θ_1 e θ_2.



Se $\cos\theta = 0$ si ha $x_1 = x_2 = 0$, mentre, se $\sin\theta = -\alpha$, si ha

1. $x_1 = x_2 = \cos\theta_1/2 = (1/2)\sqrt{1-\alpha^2}$ in corrispondenza di θ_1,
2. $x_1 = x_2 = \cos\theta_2/2 = -(1/2)\sqrt{1-\alpha^2}$ in corrispondenza di θ_2.

Si hanno in definitiva le configurazioni di equilibrio

$$\begin{aligned}
&(Q_1) \quad (x_1, x_2, \theta) = (0, 0, \pi/2),\\
&(Q_2) \quad (x_1, x_2, \theta) = (0, 0, -\pi/2),\\
&(Q_3) \quad (x_1, x_2, \theta) = (\cos\theta_1/2, \cos\theta_1/2, \theta_1),\\
&(Q_4) \quad (x_1, x_2, \theta) = (\cos\theta_2/2, \cos\theta_2/2, \theta_2),
\end{aligned}$$

dove le ultime due esistono solo per $\alpha \in (0,1)$. Per studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio, si calcola la matrice hessiana: tenendo conto che

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 V_V}{\partial x_1^2} = 2k, \qquad && \frac{\partial^2 V_V}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \qquad && \frac{\partial^2 V_V}{\partial x_1 \partial \theta} = k\sin\theta, \\
&\frac{\partial^2 V_V}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, && \frac{\partial^2 V_V}{\partial x_2^2} = 2k, && \frac{\partial^2 V_V}{\partial x_2 \partial \theta} = k\sin\theta, \\
&\frac{\partial^2 V_V}{\partial \theta \partial x_1} = k\sin\theta, && \frac{\partial^2 V_V}{\partial \theta \partial x_2} = k\sin\theta, && \frac{\partial^2 V_V}{\partial \theta^2} = -\frac{Mg}{2}\sin\theta + k(x_1+x_2)\cos\theta,
\end{aligned}
$$

si ottiene

$$
\mathcal{H}(x_1,x_2,\theta) = \begin{pmatrix} 2k & 0 & k\sin\theta \\ 0 & 2k & k\sin\theta \\ k\sin\theta & k\sin\theta & -\frac{Mg}{2}\sin\theta + k(x_1+x_2)\cos\theta \end{pmatrix}.
$$

Quindi, si ha in corrispondenza di (Q_1)

$$
\mathcal{H}(0,0,\pi/2) = \begin{pmatrix} 2k & 0 & k \\ 0 & 2k & k \\ k & k & -Mg/2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -\alpha \end{pmatrix},
$$

in corrispondenza di (Q_2)

$$
\mathcal{H}(0,0,-\pi/2) = \begin{pmatrix} 2k & 0 & -k \\ 0 & 2k & -k \\ -k & -k & Mg/2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix},
$$

in corrispondenza di (Q_3)

$$
\mathcal{H}(\sin\theta_1,\sin\theta_1,\theta_1) = \begin{pmatrix} 2k & 0 & -k\alpha \\ 0 & 2k & -k\alpha \\ -k\alpha & -k\alpha & (Mg\alpha/2)+k-k\alpha^2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 1 \end{pmatrix}
$$

e in corrispondenza di (Q_4)

$$
\mathcal{H}(\sin\theta_2,\sin\theta_2,\theta_2) = \begin{pmatrix} 2k & 0 & k\alpha \\ 0 & 2k & k\alpha \\ k\alpha & k\alpha & (Mg\alpha/2)+k-k\alpha^2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 1 \end{pmatrix}.
$$

Applicando il criterio di Sylvester, poiché i minori principali di ordine 1 e 2 sono positivi a vista, basta calcolare il determinante $\det\mathcal{H}$, ovvero il minore principale di ordine 3, per stabilire se la matrice hessiana sia definita positiva (se $\det\mathcal{H} > 0$) e indefinita (se $\det\mathcal{H} < 0$).

Si ha la seguente situazione:

1. $\det\mathcal{H}(0,0,\pi/2) = 4k^3(-\alpha-1) \Longrightarrow (Q_1)$ è un punto di sella,
2. $\det\mathcal{H}(0,0,-\pi/2) = 4k^3(\alpha-1) \Longrightarrow (Q_2)$ è un punto di minimo se $\alpha > 1$, di sella se $\alpha < 1$,

3. $\det \mathcal{H}(\cos\theta_1, \cos\theta_1, \cos\theta_1) = \det \mathcal{H}(\cos\theta_2, \cos\theta_2, \cos\theta_2) = 4k^3(1-\alpha^2) \Longrightarrow (Q_3)$ e (Q_4) sono punti di minimo quando esistono (cioè per $\alpha \in (0,1)$).

Mentre quindi la configurazione di equilibrio (Q_1) è sempre instabile, si ha una biforcazione per quanto riguarda le configurazioni di equilibrio stabili: per $\alpha > 1$, oltre a (Q_1) esiste solo un'altra configurazione di equilibrio, data da (Q_2), che è stabile, e, quando α diventa minore di 1, la configurazione di equilibrio (Q_2) diventa instabile e compaiono le due nuove configurazioni di equilibrio (Q_3) e (Q_4), entrambe stabili.

Per quanto riguarda la stabilità della configurazione di equilibrio (Q_2), il caso $\alpha = 1$ non è compreso nella discussione precedente. Si può vedere che (Q_2) è stabile per $\alpha = 1$ ragionando come segue. Scrivendo $\theta = -(\pi/2) + \varphi$ e usando che

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \cos\varphi\cos\frac{\pi}{2} + \sin\varphi\sin\frac{\pi}{2} = \sin\varphi, \\ \sin\theta &= \sin\varphi\cos\frac{\pi}{2} - \cos\varphi\sin\frac{\pi}{2} = -\cos\varphi \end{aligned}$$

si trova, per $\alpha = 1$,

$$\begin{aligned} \frac{V_V}{k} &= -\cos\varphi + x_1^2 + x_2^2 - (x_1 + x_2)\sin\varphi \\ &= \Big(x_1 - \frac{\sin\varphi}{2}\Big)^2 + \Big(x_2 - \frac{\sin\varphi}{2}\Big)^2 + \Big(-\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi^2\Big), \end{aligned}$$

che, notando che

$$-\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin^2\varphi = \frac{1}{2}\Big(-2\cos\varphi - 1 + \cos^2\varphi\Big) = -1 + \frac{1}{2}\big(1-\cos\varphi\big)^2,$$

si può riscrivere

$$\frac{V_V}{k} = -1 + \frac{1}{2}\big(1-\cos\varphi\big)^2 + \Big(x_1 - \frac{\sin\varphi}{2}\Big)^2 + \Big(x_2 - \frac{\sin\varphi}{2}\Big)^2.$$

Quindi $V_V \geq -k$ e si ha $V_V = -k$ se e solo se $\varphi = x_1 = x_2 = 0$. Ne segue che $(x_1, x_2, \theta) = (0, 0, -\pi/2)$ è un punto di minimo isolato per V_V per $\alpha = 1$.

[Per calcolare la forza vincolare (R_x, R_y) che agisce sul punto P_1, si devono considerare le equazioni

$$m\ddot{x}_1 = F_x + R_x, \qquad m\ddot{y}_1 = F_y + R_y,$$

dove

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial V}{\partial x_1} = -k\left((x_1 - x_A) + (x_1 - x_B)\right), \\ F_y &= -\frac{\partial V}{\partial y_1} = -k\left((y_1 - y_A) + (y_1 - y_B)\right) - mg, \end{aligned}$$

che, dopo aver utilizzato i vincoli, diventano

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial V}{\partial x_1} = -k\left(2x_1 - \cos\theta\right), \\ F_y &= -\frac{\partial V}{\partial y_1} = -k\left(2 - \sin\theta\right) - mg. \end{aligned}$$

Si ha inoltre $m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + k\cos\theta$ per le equazioni di Eulero-Lagrange e $m\ddot{y}_1 = 0$ per le condizioni di vincolo. In conclusione, si ottiene

$$\begin{aligned} R_x &= m\ddot{x}_1 - F_x = -2kx_1 + k\cos\theta + 2kx_1 - k\cos\theta = 0, \\ R_y &= m\ddot{y}_1 - F_y = 0 + 2k - k\sin\theta + mg. \end{aligned}$$

Si noti che risulta $R_x = 0$ consistentemente con il principio di d'Alembert, dal momento che le forze vincolari sono ortogonali alla superficie di vincolo e quindi la forza vincolare che agisce sul punto P_1, in quanto ortogonale alla guida, è diretta nella direzione y.]

<u>Esercizio 4.</u> Le coordinate dei punti P_1 e P_2 sono

$$P_1 = (x_1, y_1), \qquad P_2 = (x_2, y_2).$$

La forza attrattiva tra i due punti è della forma

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = -\alpha \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{\|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\|^3},$$

dove $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1, 0)$, $\boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2, 0)$ e

$$\|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

è la distanza tra i due punti P_1 e P_2. Si ha

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\alpha \frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3} = -\frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|}\left(\frac{\alpha}{\|\boldsymbol{r}\|^2}\right) = -\frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} U(\|\boldsymbol{r}\|)\right) = -\frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|}\frac{\partial}{\partial \rho} U(\rho)\Big|_{\rho = \|\boldsymbol{r}\|},$$

da cui si deduce che

$$U(\rho) = \int \left(\frac{\alpha}{\rho^2}\right) \mathrm{d}\rho = \alpha \int \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^2} = -\frac{\alpha}{\rho}.$$

L'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right),$$

mentre l'energia potenziale è data dalla somma di più contributi, ovvero $V = V_{\mathrm{el}} + V_{\mathrm{gr}} + V_{\mathrm{cf}} + V_{\mathrm{att}}$, dove

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{el}} &= \frac{k}{2}\left(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2\right), \\ V_{\mathrm{gr}} &= mg\left(y_1 + y_2\right), \\ V_{\mathrm{cf}} &= -\frac{m\omega^2}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right), \\ V_{\mathrm{att}} &= U(\|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\|) = -\frac{\alpha}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}. \end{aligned}$$

In conclusione, la lagrangiana del sistema è data da $\mathcal{L} = T - V$, dove

$$V = \frac{k}{2}\left(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2\right) + mg\left(y_1 + y_2\right) - \frac{m\omega^2}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) - \frac{\alpha}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}.$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono,

$$m\ddot{x}_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1}, \qquad m\ddot{x}_2 = -\frac{\partial V}{\partial x_2}, \qquad m\ddot{y}_1 = -\frac{\partial V}{\partial y_1}, \qquad m\ddot{y}_2 = -\frac{\partial V}{\partial y_2},$$

con

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x_1} &= \beta x_1 + \alpha\frac{x_1 - x_2}{\rho^3}, \\
\frac{\partial V}{\partial x_2} &= \beta x_2 + \alpha\frac{x_2 - x_1}{\rho^3}, \\
\frac{\partial V}{\partial y_1} &= k y_1 + mg + \alpha\frac{y_1 - y_2}{\rho^3}, \\
\frac{\partial V}{\partial y_2} &= k y_2 + mg + \alpha\frac{y_2 - y_1}{\rho^3},
\end{aligned}$$

dove si è usata la notazione $\rho = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ e si è definito $\beta := \big(k - m\omega^2\big)$.

Le configurazioni di equilibrio sono i punti critici dell'energia potenziale. Quindi dobbiamo imporre le condizioni

$$\begin{aligned}
\beta x_1 + \alpha\frac{x_1 - x_2}{\rho^3} &= 0, \\
\beta x_2 + \alpha\frac{x_2 - x_1}{\rho^3} &= 0, \\
k y_1 + mg + \alpha\frac{y_1 - y_2}{\rho^3} &= 0, \\
k y_2 + mg + \alpha\frac{y_2 - y_1}{\rho^3} &= 0.
\end{aligned}$$

Assumiamo inizialmente che si abbia $\beta \neq 0$. Sommando e sottraendo le prime due equazioni, si trova

$$\beta(x_1 + x_2) = 0, \qquad \beta(x_1 - x_2) + 2\alpha\frac{x_1 - x_2}{\rho^3} = 0, \tag{$*$}$$

mentre, sommando e sottraendo le ultime due equazioni, si ottiene

$$k(y_1 + y_2) + 2mg = 0, \qquad k(y_1 - y_2) + 2\alpha\frac{y_1 - y_2}{\rho^3} = 0. \tag{$**$}$$

Le prime due equazioni implicano

$$x_2 = -x_1, \qquad 2x_1\left(\beta + \frac{2\alpha}{\rho^3}\right) = 0,$$

mentre dalle ultime due si trova

$$y_2 = -y_1 - \frac{2mg}{k}, \qquad 2\left(k y_1 + mg + \frac{2\alpha y_1}{\rho^3}\right) = 0.$$

L'equazione

$$2x_1\left(\beta + \frac{2\alpha}{\rho^3}\right) = 0$$

è soddisfatta o se $x_1 = 0$ o se

$$\rho = \left(-\frac{2\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

L'ultima condizione può essere soddisfatta solo se $\beta < 0$ ovvero solo se $m\omega^2 > k$.

Consideriamo prima il caso $x_1 = 0$. In tal caso, si ha anche $x_2 = 0$ e $\rho = |y_1 - y_2| = |2y_1 + (2mg/k)|$ e l'equazione

$$ky_1 + mg + \frac{\alpha(y_1 - y_2)}{\rho^3} = 0$$

si riduce a

$$ky_1 + mg + \frac{2\alpha(y_1 + (mg/k)}{8|y_1 + (mg/k)|^3} = 0,$$

che si può riscrivere

$$k\left(y_1 + \frac{mg}{k}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{4|y_1 + (mg/k)|^3}\right) = 0,$$

cheè soddisfatta solo se $y_1 = -mg/k$. Per tale valore di y_1 si ricava $y_2 = -y_1 - (2mg(k) = (mg/k) - (2mg/k) = -mg/k$. D'altra parte, se $x_1 = x_2 = 0$ e $y_1 = y_2 = -mg/k$, si trova $\rho = 0$, che è al di fuori del dominio dell'energia potenziale.

Possiamo perciò concludere che per $\beta > 0$ non esistono configurazioni di equilibrio. Se $\beta < 0$, per avere una configurazione di equilibrio, si deve quindi imporre la condizione

$$\rho = \left(-\frac{2\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{2\alpha}{\rho^3} = -\beta.$$

La seconda equazione in $(**)$ diventa allora

$$k(y_1 - y_2) - \beta(y_1 - y_2) = 0,$$

che, tenendo conto che $\beta \neq k$ per $\beta < 0$, ammette come unica soluzione $y_1 = y_2$. L'equazione $k(y_1 + y_2) + 2mg = 0$, che si riscrive $2ky_1 + 2mg = 0$, fissa allora

$$y_1 = y_2 = y_0 = -\frac{mg}{k}.$$

Le coordinate x_1 e x_2 sono invece determinate dalle equazioni

$$x_2 = -x_1, \qquad \rho^3 = |x_1 - x_2|^3 = -\frac{2\alpha}{\beta},$$

che, insieme, dànno

$$|x_1| = x_0 := \left(-\frac{\alpha}{4\beta}\right)^{\frac{1}{3}},$$

da cui si ottengono le due configurazioni di equilibrio

$$\begin{array}{ll} (Q_1) \qquad & (x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_0, -x_0, y_0, y_0), \\ (Q_2) \qquad & (x_1, x_2, y_1, y_2) = (-x_0, x_0, y_0, y_0). \end{array}$$

Resta da discutere il caso $\beta = 0$ (cioè $k = m\omega^2$). In tal caso la prima condizione in $(*)$ scompare, mentre la seconda condizione dà

$$\frac{x_1 - x_1}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

che è incompatibile se $y_1 = y_2$ e implica invece $x_1 = x_2$ se $y_1 \neq y_2$. D'altra parte, se $x_1 = x_2$, si ha $\rho = |y_1 - y_2|$ e si può procedere come nel caso $x_1 = x_2 = 0$ per studiare le due equazioni in $(**)$. Quindi si trova $y_1 = y_2 = y_0 = -mg/k$. Di conseguenza, anche per $\beta = 0$ non esistono configurazioni di equilibrio.

[Per studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio si deve calcolare la matrice hessiana dell'energia potenziale. Si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} &= \beta + \frac{\alpha}{\rho^3} - \frac{3\alpha(x_1 - x_2)^2}{\rho^5}, & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{3\alpha(x_1 - x_2)^2}{\rho^5}, \\
\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial y_1} &= -\frac{3\alpha(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}{\rho^5}, & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial y_2} &= \frac{3\alpha(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}{\rho^5}, \\
\frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} &= \frac{3\alpha(x_1 - x_2)^2}{\rho^5}, & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} &= \beta + \frac{\alpha}{\rho^3} - \frac{3\alpha(x_1 - x_2)^2}{\rho^5}, \\
\frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial y_1} &= \frac{3\alpha(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}{\rho^5}, & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial y_2} &= -\frac{3\alpha(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}{\rho^5}, \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial x_1} &= -\frac{3\alpha(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}{\rho^5}, & \frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial x_2} &= \frac{3\alpha(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}{\rho^5}, \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} &= k + \frac{\alpha}{\rho^3} - \frac{3\alpha(y_1 - y_2)^2}{\rho^5}, & \frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_2} &= \frac{3\alpha(y_1 - y_2)^2}{\rho^5}, \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y_2 \partial x_1} &= \frac{3\alpha(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}{\rho^5}, & \frac{\partial^2 V}{\partial y_2 \partial x_2} &= -\frac{3\alpha(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}{\rho^5}, \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y_2 \partial y_1} &= \frac{3\alpha(y_1 - y_2)^2}{\rho^5}, & \frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2} &= k + \frac{\alpha}{\rho^3} - \frac{3\alpha(y_1 - y_2)^2}{\rho^5}.
\end{aligned}$$

Ovviamente le derivate miste sono uguali – come implica il teorema di Schwarz. In corrispondenza delle configurazioni di equilibrio (Q_1) e (Q_2) si ha $x_2 = -x_1$, dove $x_1 = \pm x_0$, e $y_1 = y_2 = y_0$, da cui segue che $\rho = 2|x_0|$. La matrice hessiana, calcolata in (Q_1) o in (Q_2), è quindi data da

$$\mathcal{H}(\pm x_0, \mp x_0, y_0, y_0) = \begin{pmatrix} \beta - (2\alpha/\rho_0^3) & (3\alpha/\rho_0^3) & 0 & 0 \\ (3\alpha/\rho_0^3) & \beta - (2\alpha/\rho_0^3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k + (\alpha/\rho_0^3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k + (\alpha/\rho_0^3) \end{pmatrix},$$

dove $y_0 = -mg/k$ e $\rho_0 = |2x_0|$. Dal momento che il minore principale di ordine 1 è negativo, le configurazione di equilibrio (Q_1) e (Q_2), quando esistono (cioè per $\beta < 0$), sono instabili.]

<u>Esercizio 5.</u> Il dominio della trasformazione di coordinate è $\mathbb{R}^2$. La seconda equazione, notando che
$$\frac{(1+q^2)^2p^2}{(1+2q^2)^2} = Q^2,$$
si può riscrivere
$$P = Q^2 - 2q + \arctan q. \tag{$*$}$$
Richiedendo che si abbia
$$P = -\frac{\partial F}{\partial Q},$$
si trova
$$F(q,Q) = -\int \left(Q^2 - 2q + \arctan q\right) \mathrm{d}Q = -\frac{Q^3}{3} + 2qQ - Q\arctan q + c_1(q),$$
dove $c_1(q)$ è al momento una funzione arbitraria della sola variabile q.

D'altra parte, dalla prima equazione si ottiene
$$p = \frac{1+2q^2}{1+q^2}Q,$$
così che, richiedendo che si abbia
$$p = \frac{\partial F}{\partial q},$$
si trova
$$\begin{aligned} F(q,Q) &= Q\int \frac{1+2q^2}{1+q^2}\mathrm{d}q = Q\left(\int \frac{2+2q^2}{1+q^2}\mathrm{d}q - \int \frac{1}{1+q^2}\mathrm{d}q\right) \\ &= 2Q\int \mathrm{d}q - Q\int \frac{1}{1+q^2}\mathrm{d}q \\ &= 2Qq - Q\arctan q + c_2(Q), \end{aligned}$$
dove $c_2(Q)$ è una funzione arbitraria di Q. In conclusione, scegliendo
$$c_1(q) = 0, \qquad c_2(Q) = -\frac{Q^3}{3},$$
si trova
$$F(q,Q) = -\frac{Q^3}{3} + 2qQ - Q\arctan q.$$

Data la lagrangiana
$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\frac{(1+2q^2)^2}{(1+q^2)^2}\dot{q}^2 + q - \frac{1}{2}\arctan q,$$

posto

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} = \frac{(1+2q^2)^2}{(1+q^2)^2}\dot q \quad \Longrightarrow \quad \dot q = \frac{(1+q^2)^2}{(1+2q^2)^2}p,$$

si trova

$$H(q,p) = p\dot q - \left(\frac{1}{2}\frac{(1+2q^2)^2}{(1+q^2)^2}\dot q^2 + q - \frac{1}{2}\arctan q \right) = \frac{1}{2}\frac{(1+q^2)^2}{(1+2q^2)^2}p^2 - q + \frac{1}{2}\arctan q.$$

In termini delle nuove coordinate (Q,P), si trova quindi

$$K(Q,P) = \frac{1}{2}\left(\frac{(1+q^2)^2}{(1+2q^2)^2}p^2 - 2q + \arctan q \right) = \frac{P}{2}.$$

Le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\dot Q = \frac{1}{2}, \qquad \dot P = 0,$$

che si integrano immediatamente e dànno

$$Q(t) = Q(0) + \frac{t}{2}, \qquad P(t) = P(0).$$

Le condizioni iniziali dànno

$$p(0) = \frac{(1+2(q(0))^2)^2}{(1+(q(0))^2)^2}\dot q(0) = \dot q(0) = 1,$$

da cui si ricavano le condizioni iniziali

$$Q(0) = p(0) = 1, \qquad P(0) = (p(0))^2 = 1,$$

La soluzione delle equazioni di Hamilton, in termini delle variabili $(Q.P)$, è quindi data da

$$Q(t) = 1 + \frac{t}{2}, \qquad P(t) = 1.$$

[Dalla $(*)$ si ottiene

$$Q^2 - P = 2q - \arctan q.$$

Poiché

$$Q^2 - P = \left(1 + \frac{t}{2}\right)^2 - 1 = 2q(t) - \arctan q(t),$$

ovvero

$$\frac{t^2}{4} + t + \arctan q(t) = 2q(t),$$

dove $|\arctan q(t)| \le \pi/2$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si ha quindi

$$-\frac{\pi}{4} \le q(t) - \left(\frac{t^2}{8} + \frac{t}{2}\right) \le \frac{\pi}{4}.$$

Ne segue che

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{q(t)}{t^2/8} = 0,$$

ovvero $q(t)$ si comporta asintoticamente come $t^2/8$ per $t \to \pm\infty$.]
[Per calcolare le parentesi di Poisson, può essere conveniente scrivere

$$Q = \frac{(1+q^2)p}{1+2q^2}, \qquad P = Q^2 - 2q + \arctan q.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
\{Q,P\} &= \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q^2}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\left(\frac{\partial Q^2}{\partial q} - 2 + \frac{1}{1+q^2}\right) \\
&= 2Q\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\left(2Q\frac{\partial Q}{\partial q} - 2 + \frac{1}{1+q^2}\right) \\
&= \frac{\partial Q}{\partial p}\left(2 - \frac{1}{1+q^2}\right) = \left(\frac{1+q^2}{1+2q^2}\right)\left(\frac{2+2q^2-1}{1+q^2}\right) = \frac{1+q^2}{1+2q^2}\,\frac{1+2q^2}{1+q^2} = 1,
\end{aligned}$$

mentre le relazioni $\{Q,Q\} = \{P,P\} = 0$ sono banalmente soddisfatte essendo le parentesi di Poisson antisimmetriche.]